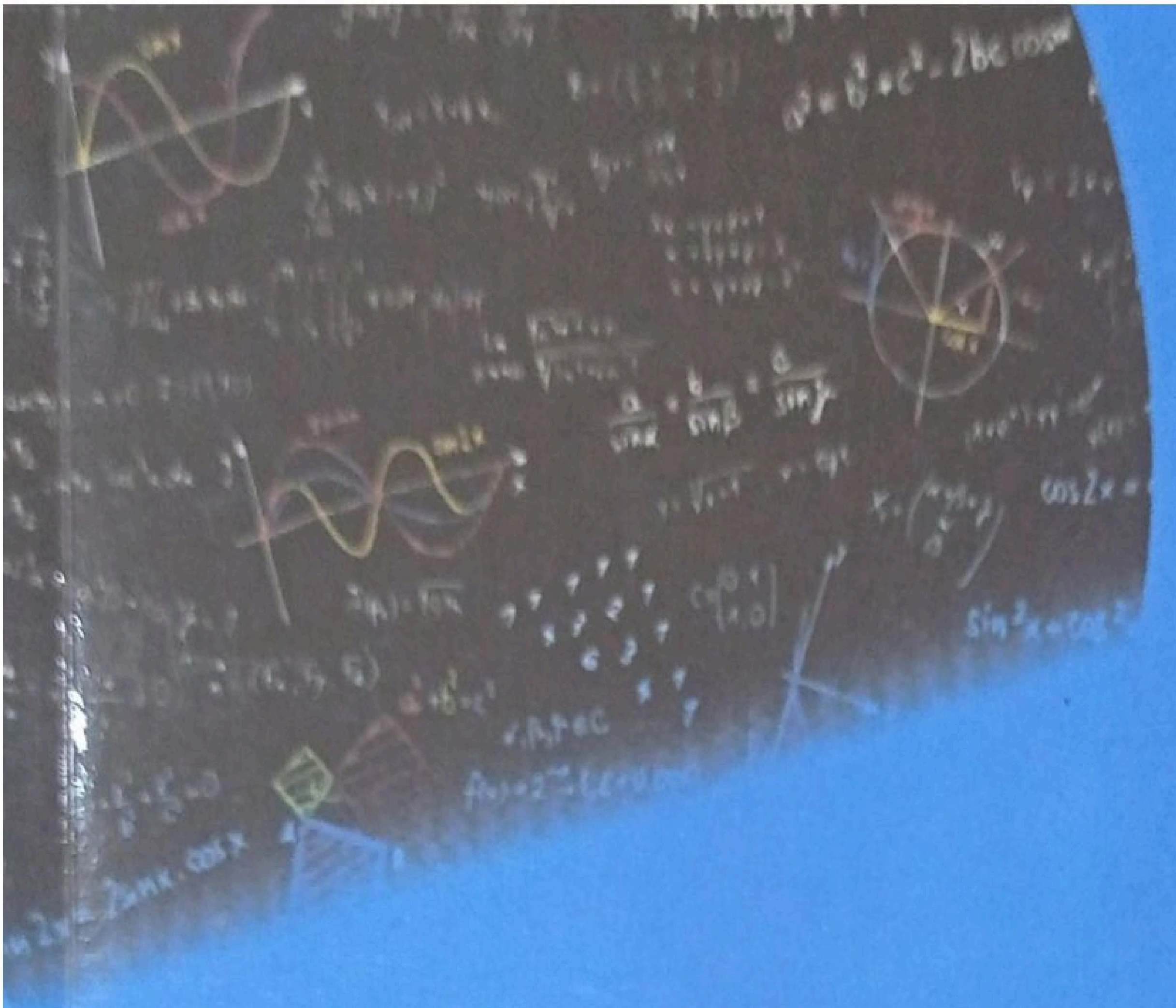
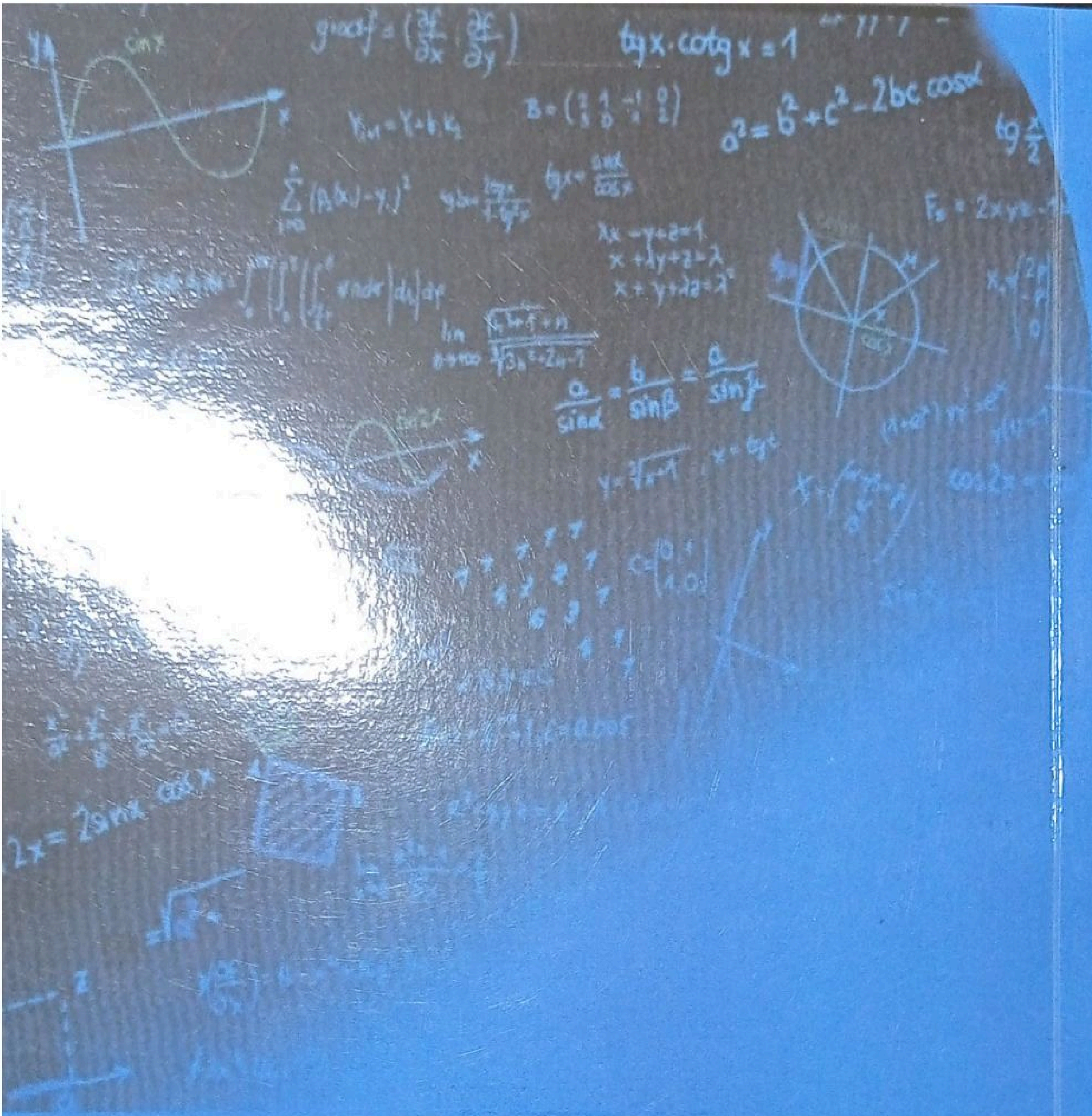


KALKULUS INTEGRAL

YENI LISTIANA
WULANDARI
FAJRIANA

Editor:
ZAFRIANA



BANDAR
PUBLISHING

Lamgugop, Syiah Kuala
Banda Aceh, Provinsi Aceh
Email. bandar.publishing@gmail.com
www.bandarpublishing.com
bandar.publishing
@bandarbuku
Bandar Publishing
08116880801

ISBN 978-623-5669-16-8

9 786235 669168

KALKULUS INTEGRAL

YENI LESTIANA
WULANDARI
FAJRIANA

Editor: SAFRIANA

KALKULUS INTEGRAL

Penulis: Yeni Listiana, Wulandari & Fajriana

Editor: Safriana

ISBN: 978-623-5669-16-8
Diterbitkan Oleh:
Bandar Publishing
Jl. Teungku Lamgugob, Syiah Kuala Banda Aceh Provinsi Aceh. Hp. 08116880801 IG. bandar.publishing
TW. @bandarbuku FB. Bandar Publishing
Anggota IKAPI

Dicetak oleh:
Percetakan Bandar di Lamgugob Banda Aceh
(Isi diluar tanggung jawab percetakan)
Cetakan Pertama, 2021
Halaman: 68 hlm. 14,5 x 20 cm

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kita panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat dan karunia-Nya, Tim Penyusun dapat menyelesaikan Buku Kalkulus Integral. Sholawat beserta salam tercurahkan kepada nabi besar Muhammad SAW. yang telah membawa umat manusia dari alam kebodohan ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Ucapan terima kasih disampaikan kepada semua pihak yang telah bekerja keras dalam menyelesaikan Buku Kalkulus Integral ini mulai dari pemikiran awal, penyusunan draf hingga penyelesaian akhir. Secara keseluruhan Buku Kalkulus Integral ini memuat lima BAB, yaitu, Integral Tak Tentu, Integral Tentu, Teknik Pengintegralan, Integral Tak Wajar, dan Aplikasi Integral. Semoga Allah SWT senantiasa memberikan berkah dan anugerah-Nya.

Kami menyadari bahwa Buku Kalkulus Integral ini masih banyak kekurangan dalam segi isi, sehingga kritik dan saran sangat kami harapkan. Kesempurnaan hanya milik Allah SWT, kami berharap modul ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Lhokseumawe, Oktober 2021

Tim Penyusun

DAFTAR ISI

BAB 1

INTEGRAL TAK TENTU

1.1 Pengertian integral (Antiderivatif)

Pertama kali didiskusikan proses kebalikan dari diferensisasi. Dengan kata lain, diberikan suatu fungsi $f\ (\boldsymbol{x})$ dan diinginkan untuk mencari suatu fungsi $F\ (\boldsymbol{x})$ sedemikian sehingga $\frac{dF\ (x)}{dx}$ = $F^{1}\ (\boldsymbol{x})$ = $f\ (\ \boldsymbol{x})$. Setiap fungsi $F\ (\boldsymbol{x})$ yang demikian tersebut dinamakan suatu antiderivatif, atau integral tak tentu *(indefinite integral),* dari fungsi $f\ (\boldsymbol{x})$, dan dituliskan

$$F\ (\boldsymbol{x}) = \int f\ (\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Di sini $f\ (\boldsymbol{x})$ dinamakan integran (yang diintegralkan) dan $\boldsymbol{x}$ dinamakan **integrator.** Dinamakan integral tak tentu sebab tidak merujuk pada nilai numemrik tertentu, atau tidak menunjuk suatu interval tertentu untuk daerah integrasi. Langkah untuk mencari antiderivatif dari $f\ (\boldsymbol{x})$ dinamakan **antidiferensiasi** atau **integrasi.**

Pengamatan pertama yaitu bahwa antiderivatif, jika ada, tidaklah tunggal. Diandaikan bahwa fungsi $F\ (\boldsymbol{x})$ adalah suatu antiderivatif dari fungsi $f\ (\boldsymbol{x})$, berarti $F^{1}\ (\boldsymbol{x})$ = $f\ (\boldsymbol{x})$. Diambil G $(\boldsymbol{x})$ = $F\ (\boldsymbol{x})$+k, dimana k adalah sembarang bilangan riil. Ini mudah dilihat bahwa $G^{I}\ (\boldsymbol{x})$ = $F^{I}\ (\boldsymbol{x})$ = $f\ (\boldsymbol{x})$, yang berarti bahwa G $(\boldsymbol{x})$ juga merupakan antiderivatif dari $f\ (\boldsymbol{x})$. Secara umum dapat dituliskan

$$\int f\ (\boldsymbol{x})\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{x}) + k$$

Dengan k selanjutnya dinamakan **konstanta integrasi**.

Sebagai contoh, diberikan $f\ (\boldsymbol{x})$ = $2\boldsymbol{x}$, maka

$$F\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2,\ G\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 - 10.\ H\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 + k$$

Merupakan antiderivatif dari f karena

$$F^{1}\ (\boldsymbol{x}) = G^{I}\ (\boldsymbol{x}) = H^{I}\ (\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}$$

Pengamatan kedua yaitu bahwa untuk sembarang fungsi $f\ (\boldsymbol{x})$, selisih dari sembarang dua antiderivatif berbeda dari $f\ (\boldsymbol{x})$ pasti merupakan suatu konstanta. Dengan kata lain, jika $F\ (\boldsymbol{x})$ dan $G\ (\boldsymbol{x})$ adalah antiderivatif- antiderivatif dari $f\ (\boldsymbol{x})$, maka $F\ (\boldsymbol{x})$ - $G\ (\boldsymbol{x})$ adalah suatu konstanta. Suatu konsekuensi dari pengamatan kedua yaitu hasil sederhana berikut ini yang berkaitan dengan derivatif dari suatu konstanta.

Antiderivatif dari Nol. Dipunyai

$$\int 0\ d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$$

Dengan kata lain, antiderivatif secara sederhana dapat diperoleh dari beberapa aturan mengenai derivatif. Berikut ini didaftar hasil-hasil tersebut. Hasil pertama yaitu berkaitan dengan aturan kelipatan konstan untuk diferensiasi.

1.2 Aturan Pangkat.

(a) Jika n adalah suatu bilangan riil sedemikian sehingga n≠-1, maka

$$\boxed{\int \boldsymbol{x^n\ dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k}}$$

(b) Dipunyai

$$\boxed{\int \boldsymbol{x^{-1} = ln\ |x| + k}}$$

Contoh 1.

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + k$$

1.3 Aturan Perkalian Konstanta

Jika suatu suatu fungsi $f\ (\boldsymbol{x})$ mempunyai antiderivatif, maka untuk sembarang bilangan riil c, dipunyai

$$\int cf\ (\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{c} \int \boldsymbol{f(x)\ dx}$$

Contoh 2.

$$\int 3x\,dx = 3\int x\,dx = \frac{3}{2}x^2 + k$$

1.4 Aturan Penjumlahan dan Pengurangan

Jika $f\ (\boldsymbol{x})$ dan $g\ (\boldsymbol{x})$ mempunyai antiderivatif, maka

$$\int \big(f(x) + g\ (x)\big)dx = \int f\ (x)\ dx + \int g\ (x)\ dx.$$

Contoh 3.

$$\int (x^3 + 3x + 1)dx = \int x^3 dx + \int 3x\,dx + \int x^0\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + x + k.$$

Contoh 4.

$$\int (x^2 - 2x - 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x\,dx - 5\int x^0\,dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 5x + k.$$

1.5 Integral Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus antiderivatif berikut ini adalah valid:

(a) $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + k$
(b) $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + k$
(c) $\int csc^2(x)\, dx = -\cot(x) + k$
(d) $\int sec^2(x)\, dx = \tan(x) + k$
(e) $\int \cot(x) \csc(x)\, dx = -\csc(x) + k$
(f) $\int \tan(x)\, sec(x)\, dx = sec(x) + k$
(g) $\int csc(x)\, dx = -ln\left|\cot(x) + \csc(x)\right| + k$
(h) $\int sec(x)\, dx = ln\left|\tan(x) + \sec(x)\right| + k$

Seringkali terdapat kemungkinan untuk mentransformasikan suatu integral kesalah satu dari bentuk :

$$\int \sin^n(x)\, dx, \int \csc^n(x)\, dx, \int \cos^n(x)\, dx, \int \sec^n(x)\, dx,$$

$$\int \tan^n(x)\, dx, \int \cot^n(x)\, dx.$$

Integral-integral tersebut dapat dihitung dengan rumus reduksi yang diperoleh mengunakan rumus integrasi parsial seperti dalam contoh–contoh berikut ini :

Contoh 5. *Diperhatikan integral tak tentu* :

$$\int \sin^n(x)\, dx$$

Diambil

$$u = \sin^{n-1}(x),\ dv = \sin(x)dx,$$

$$du = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\, dx, v = -\cos(x),$$

Maka

$$\int \sin^n(x)\, dx = \int \sin^{n-1}(x)\sin(x)\, dx$$

$$= \sin^{n-1}(x)(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))\,(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\, dx$$

$$= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\,(1-\sin^2(x))\, dx$$

$$= -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\, dx - (n-1)\int \sin^n(x)\, dx.$$

Sekarang kita menggunakan aljabar untuk menyelesaikan integral:

$$\int \sin^n(x)\, dx + (n-1)\int \sin^n(x)dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\, dx$$

$$n \int \sin^n(x)\, dx = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\, dx$$

Sehingga diperoleh rumus reduksi

$$\boxed{\int \boldsymbol{\sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx.}} \tag{1.6}$$

$untuk\ n = 2, diperoleh$

$$\int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1dx = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x + k$$
$$= \frac{1}{2}\ (x - \sin(x)\cos(x))$$

$untuk\ n = 3, diperoleh$

$$\int \sin^3(x)\ dx = -\frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) + \frac{2}{3}\int \sin(x)\ dx$$
$$= -\frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) - \frac{2}{3}\cos(x) + k.$$

$untuk\ n = 4, diperoleh$

$$\int \sin^4(x)\ dx = -\frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{4}\int \sin^2(x)\ dx$$
$$= -\frac{1}{4}\sin^3(x)\cos(x) + \frac{3}{8}\ (x - \sin(x)\cos(x)) + k.$$

$\boldsymbol{Contoh\ 6}.\ sekarang\ diandaikan\ n = -m\ di\ persamaan\ (1.6), maka$

$$\frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2}(x)\ dx = \frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \int \sin^n(x)\ \ dx$$
$$\int \sin^{n-2}(x)\ \ dx\ = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n}{n-1}\int \sin^n(x)\ dx, n \neq 1$$
$$\int \sin^{-m-2}(x)\ dx = \frac{1}{-m-1}\sin^{-m-1}(x)\cos(x)$$
$$+ \frac{-m}{-m-1}\int \sin^{-m}(x)\ \ dx, m \neq -1$$
$$\int \csc^{m+2}(x)\ dx\ \ = -\frac{1}{m+1}\csc^m(x)\cot(x) + \frac{m}{m+1}\int \csc^m(x)\ \ dx, m \neq -1.$$

$ini\ memberikan\ rumus\ reduksi$

$$\boxed{\int \boldsymbol{\csc^p(x)\ \ dx = -\frac{1}{p-1}\csc^{p-2}(x)\cot(x) + \frac{p-2}{p-1}\int \csc^{p-2}(x)\ dx,\ \ p \neq 1.}}$$

$\boldsymbol{Contoh\ 7}.\ Digunakan\ metode\ yang\ serupa\ dengan\ contoh\ 2.\ untuk\ menghitung$

$integral\ tak\ tentu$

$$\int \cos^n(x)\,dx.$$

$Diingat\ bahwa\ \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ dan\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x).\ karena\ itu$

$$\int \cos^n(x)\,dx = \int \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ dx; \qquad \left[dimisalkan\ u = \frac{\pi}{2} - x,\ \ du = -dx\right]$$

$$= \int \sin^n\ (u)\,(-du) = -\int \sin^n\ (u)\,du$$

$$= -\left[-\frac{1}{n}\sin^{n-1}(u)\cos(u) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(u)\,du\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sin^{n-1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ (-dx)$$

$yang\ memberikan\ rumus\ reduksi$

$$\boxed{\int \boldsymbol{\cos^n(x)}\ \ \boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\cos^{n-1}(x)\sin(x)} + \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n}}\int \boldsymbol{\cos^{n-2}(x)}\ \ \boldsymbol{dx}.}$$

$$\boxed{\int \boldsymbol{sec^p(x)dx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{p-1}}\boldsymbol{sec^{p-2}(x)\tan(x)} + \frac{\boldsymbol{p-2}}{\boldsymbol{p-1}}\int \boldsymbol{sec^{p-2}(x)dx}, \quad \boldsymbol{p \neq 1}}$$

$$\boxed{\int \boldsymbol{tan^n(x)dx} = \frac{\boldsymbol{tan^{n-1}(x)}}{\boldsymbol{n-1}} - \int \boldsymbol{tan^{n-2}(x)dx}, \quad \boldsymbol{n \neq 1}}$$

$$\boxed{\int \boldsymbol{cot^n(x)dx} = -\frac{\boldsymbol{cot^{n-1}(x)}}{\boldsymbol{n-1}} - \int \boldsymbol{cot^{n-2}(x)dx}, \quad \boldsymbol{n \neq 1}}$$

Selanjutnya menggunakan identitas $sin^2x + cos^2x = 1$, kita dapat menghitung integral berbentuk $\int sin^m(x)cos^n(x)dx$ (1.9)

Dimana m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif. Aturannya adalah seperti berikut:

(a) Jika m adalah ganjil, maka diambil substitusi $u = \cos(x)$
(b) Jika n adaah ganjil, maka diambil substitusi $u = \sin(x)$
(c) Jika m dan n adalah genap, maka (1.9) dapat ditransformasikan ke integral jumlahan dari pangkat-pangkat genap untuk untuk $\cos(x)$ atau $\sin(x)$

Dicatat bahwa aturan (a) dan (b) di atas akan mentransformasikan integral ke suatu polinomial dalam u. Sementara itu, dalam aturan (c) perlu digunakan rumus reduksi untuk menyelesaikan integral yang dijumpai.

Contoh 8. Perhatikan integral tak tentu

$$\int sin^4(x)cos^3(x)dx$$

Pertama kali dinyatakan

$$\int sin^4(x)cos^3(x)dx = \int sin^4(x)cos^2(x)\cos(x)dx$$

$$= \int sin^4(x)\left(1 - sin^2(x)\right)\cos(x)\,dx$$

Diambil substitusi $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$ maka:

$$\int sin^4(x)cos^3(x)dx = \int u^4(1-u^2)du = \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + k$$

$$= \frac{1}{5}sin^5(x) - \frac{1}{7}sin^7(x) + k$$

Metode diatas juga bekerja untuk suatu pangkat ganjil dari $\sin(x)$ dikalikan sembarang pangkat dari $\cos(x)$, dan juga sebaliknya.

Contoh 9. Perhatikan integral tak tentu

$$\int \sqrt{\cos(x)}\,sin^3(x)dx$$

Pertama kali nyatakan

$$\int \sqrt{\cos(x)}\,sin^3(x)dx = \int \sqrt{\cos(x)}\,sin^2(x)\sin(x)dx$$

$$= \int \sqrt{\cos(x)}\,\left(1 - cos^2(x)\right)\sin(x)dx$$

Substitusi $u = \cos(x)$, $du = -sin(x)dx$ maka

$$\int \sqrt{\cos(x)}\,sin^3(x)dx = \int \sqrt{u}(1-u^2)(-1)du = \int -u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{5}{2}}du$$

$$= -\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + k$$

$$= -\tfrac{2}{3}cos^{\frac{3}{2}}(x) + \tfrac{2}{7}cos^{\frac{7}{2}}(x) + k$$

Kita juga dapat menghitung integral-integral berbentuk

$$\int tan^m(x)sec^n(x)dx \quad \text{dan} \quad \int cot^m(x)csc^n(x)dx$$

Aturannya adalah sebagai berikut:

(a) Ketika m adalah genap, maka digunakan identitas $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ untuk integral pertama atau $cot^2(x) = csc^2(x) - 1$ untuk integral kedua
(b) Jika m adalah ganjil, maka digunakan substitusi $u = \sec(x)$ untuk integral pertama atau $u = -\csc(x)$ untuk integral kedua

Dicatat bahwa dala aturan (a) perrlu digunakan rumus reduksi $sec^n(x)$ atau $csc^n(x)$ untuk menyelesaikan integral yang dijumpai setelah dilakukan substitusi. Sementara itu aturan (b) mentransfomasikan integral ke suatu polinoomial dalam u.

Contoh 10. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int \cot^3(x)\csc^3(x)\,dx.$$

Pertama kali dinyatakan

$$\begin{aligned}\int \cot^3(x)\csc^3(x)\,dx &= \int \cot^2(x)\csc^2(x)\,(\cot(x)\csc(x))\,dx\\ &= \int (\csc^2(x) - 1)\csc^2(x)\,(\cot(x)\csc(x))\,dx\end{aligned}$$

Diambil subtitusi u = -csc (x),du = cot (x) csc (x) dx,Maka

$$\begin{aligned}\int \cot^3(x)\csc^3(x)\,dx &= \int (u^2-1)u^2\,du = \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + k\\ &= -\tfrac{1}{5}\csc^5(x) + \tfrac{1}{3}\csc^3(x) + k\end{aligned}$$

Berikutnya dengan menggunakan identitas-identitas trigonometri :$\cos^2$

$$\text{Sin}(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\{\sin(x-y) + \sin(x+y)\}$$

$$\text{Sin}(x)\sin(y) = \tfrac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$

$$\text{Cos}(x)\cos(y) = \tfrac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}$$

Kita mendapatkan rumus rumus integrasi seperti berikut ini :

(1) $\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\ \frac{\cos((b-a)x)}{b-a} - \frac{\cos((b+a)x)}{b+a} + k,\ a^2 \neq b^2$

(2) $\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{1}{2}\ \frac{\sin((b-a)x)}{b-a} - \frac{\sin((b+a)x)}{b+a} + k,\ a^2 \neq b^2$

(3) $\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{1}{2}\ \frac{\sin((b-a)x)}{b-a} + \frac{\sin((b+a)x)}{b+a} + k,\ a^2 \neq b^2$

Untuk bilangan bilangan real a dan b.

1.6 Integral Fungsi Hiperbolik

Rumus – rumus integrasi berikut ini adalah valid :

(a) $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + k$ (b) $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + k$

(c) $\int \tanh(x)dx = In\ (\cosh(\mathrm{x})) + \mathrm{k}$ (d) $\int \coth(x)dx = In\ |\sinh\ (\mathrm{x})| + \mathrm{k}$

(e) $\int \mathrm{sech}(x)dx = 2\arctan(e^x) + k$ (f) $\int \cosh(x)dx = In\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + k$

Setiap rumus diatas dapat secara mudah dibuktikan dengan keferensiasi ruas kanan untuk mendapatkan integral diruas kiri dan juga mengingat bahwa

$$\mathrm{Sinh}\ (\mathrm{x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ dan } \cosh\ (\mathrm{x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Contoh 11. Untuk n **€N** dicari rumus reduksi untuk integral-integral berikut :

$$\int sinh^n(x)dx,\ \int cosh^n\ (x)dx$$

(a)Digunakan rumus integrasi parsial dengan mengambil

$$\mathrm{U}=sinh^{n-1}(x) \text{ dan } \mathrm{dv}=\sinh(x)\ dx,$$

Sehingga diperoleh

$$\int sinh^n(x)dx = \int sinh^{n-1}(x)\sinh(x)\ dx$$

$=sinh^{n-1}(x)\cosh(x) - \int \cosh(x)\,.\,(n-1)sinh^{n-2}(x)\cosh(x)\ dx$

$=sinh^{n-1}(x)\cosh(x) - (n-1)\int sinh^{n-2}\ (x)cosh^2(x)dx$

$=sinh^{n-1}(x)\cosh(x) - (n-1)\int sinh^{n-2}\ (x)\big(1 + sinh^2(x)\big)dx.$

Karena itu,

$$\int sinh^n\ (x)d = sinh^{n-1}(x)\cosh(x) - (n-1)\int sinh^{n-2}\ (x)dx - (n-1)sinh^n(x)dx.$$

Dibawa suku terakhir di ruas kanan ke ruas kiri untuk memperoleh

$$n\int sinh^n\ (x)dx = sinh^{n-1}(x)\cosh(x) - (n-1)\int sinh^{n-2}(x)dx.$$

Jadi,

$$\boldsymbol{\int sinh^n\ (x)dx = \frac{1}{n}sinh^{n-1}(x)\cosh(x) - \frac{(n-1)}{n}\int sinh^{n-2}(x).}$$

(b) Dengan cara yang sama seperti diatas, diambil
u=$cosh^{n-1}(x)\ dan\ dv = \cosh(x)\,dx$,

maka

$$\int cosh^n(x)dx = \int cosh^{n-1}(x)\cosh(x)\,dx$$

$= cosh^{n-1}(x)\sinh(x) - \int \sinh(x).(n-1)cosh^{n-2}(x)\sinh(x)\,dx = cosh^{n-1}(x)\sinh(x) - (n-1)\int cosh^{n-2}(x)sinh^2(x)dx$

$= cosh^{n-1}(x)\sinh(x) - (n-1)\int cosh^{n-2}(x)(cosh^2(x) - 1)dx$

$= cosh^{n-1}(x)\sinh(x) - (n-1)\int cosh^n dx + (n-1)\int cosh^{n-2}(x)dx.$

Dibawa suku kedua di ruas kedua di ruas kanan ke ruas kiri untuk memperoleh

n$\int cosh^n(x)dx = cosh^{n-1}(x)\sinh(x) + (n-1)\int cosh^{n-2}(x)dx.$

Jadi,

$$\boldsymbol{\int cosh^n(x)dx = \frac{1}{n}cosh^{n-1}(x)\sinh(x) + \frac{(n-1)}{n}\int cosh^{n-2}(x)dx}.$$

1.7 Integral Fungsi Eksponensial

Diandaikan a > 0 dan a≠1, maka

$$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + k}$$

Secara khusus, dengan pengambilan *a = e* akan dipunyai

$$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + k}$$

Contoh 12. diperoleh:

$$\int (e^x + 3\cos(x)\,dx = \int e^x dx + \int 3\cos(x)\,dx = e^x + 3\sin(x) + k$$

CONTOH PENGHITUNGAN INTEGRAL TAK TENTU

Contoh 13. *Menggunakan aturan penjumlahan, aturan perkalian konstan, dan antiderivatif dari pangkat, diperoleh*

$$\int (x^3 + 3x + 1)dx = \int x^3 dx + \int 3x\,dx + \int x^0\,dx$$

$$= \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}x^2 + x + k.$$

Contoh 14. *Menggunakan aturan penjumlahan, antiderivatif dari pangkat dan fungsi trigonometri, diperoleh*

$$\int (x^3 + \sin\ (x))\ dx = \int x^3 dx + \int \sin\ (x)\ dx = -\cos\ (x) + \tfrac{1}{4}x^4 + k$$

Contoh 15. diperoleh:

$$\int (\sin(x) + \sec\ (x)\ dx = \int \sin(x)\ dx + \int \sec(x)\, dx$$

$$= -\cos(x) + \ln|\tan(x) + \sec(x)| + k.$$

Contoh 16. diperoleh:

$$\int \frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} dx = \int \frac{(1-\sin(x))(1-\sin(x))}{1+\sin(x))-1-\sin(x))} dx$$

$$= \int \frac{1 - 2\sin\ (x) + sin^2(x)}{1 - sin^2\,(x)} dx$$

$$= \int \frac{1 - 2\sin\ (x) + sin^2}{cos^2\,(x)} dx$$

$$= \int (sec^2(x) - 2\tan(x)\sec\ (x) + tan^2(x))dx$$

$$= \int sec^2(x) - 2\tan(x)\sec(x) + sec^2(x) - 1)dx$$

$$= \int (2sec^2(x) - 2\tan(x)\sec(x) - 1)dx$$

$$= 2\tan(x) - 2\sec(x) - x + k$$

Latihan

Hitung setiap integral tak tentu berikut ini:

1. $\int x^3 dx$
2. $\int x^{\frac{5}{2}} dx$
3. $\int (5x + 3) dx$
4. $\int (1 + 2x + 3x^2 dx$
5. $\int (2x^2 - 3x + 1) dx$
6. $\int (12x^7 - 3x^5 + 2x^2 + 1) dx$
7. $\int (5 + x^{-2} - 4x^3) dx$
8. $\int 3x^4 + 19x^{-3}) dx$
9. $\int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx$
10. $\int 2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}) dx$
11. $\int (x - 3)^2 dx$
12. $\int (2x - 3)^2 dx$
13. $\int (x^2 + a)^2 dx$
14. $\int (1 + x^{-1})^2 dx$
15. $\int (x + \frac{1}{2})^2 dx$
16. $\int (x - \frac{1}{x})^2 dx$
17. $\int (x - 2)(x + 3) dx$
18. $\int \frac{x+1}{x} dx$
19. $\int \frac{2x^2 - 3x + 6}{x^2} dx$
20. $\int \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1} dx$
21. $\int \frac{x^3 - a^3}{x - a} dx$
22. $\int \frac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4} dx$
23. $\int \sqrt{3}\, dx$
24. $\int \sqrt{x} dx$
25. $\int \sqrt{2px}\, dx$
26. $\int x\sqrt{x} dx$

27. $\int (x^{\frac{1}{3}} + 8\sqrt[3]{x} - 3x)dx$
28. $\int (3 + \sqrt{x})(4 - 2\sqrt{x}dx$
29. $\int \frac{3x+1}{3\sqrt{x}}dx$
30. $\int \frac{4+3\sqrt{x}+x\sqrt{x}}{x^2}dx$
31. $\int (\frac{\sqrt{x}}{5} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}}dx$
32. $\int (\frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \sqrt{\frac{3x}{27}}dx$
33. $\int 8e^x dx$
34. $\int 16(e^x + 1)dx$
35. $\int \frac{x^2e^x+x}{x^2}dx$
36. $\int (5x + \frac{3}{e^{-x}})dx$
37. $\int ((x + 1)^3 + e^x)\, dx$
38. $\int 5\cos(x)\, dx$
39. $\int (1 - 2\cos(x))dx$
40. $\int (5\cos(x) + 4x)dx$
41. $\int (\sin(x) + \cos(x)\, dx$
42. $\int 10sec^2(x)dx$
43. $\int (sex^2(x) + 1)dx$
44. $\int \left(\sqrt{x} + \sec(x)\tan(x)\right)dx$

Untuk soal 1-8, hitunglah setiap integral yang diberikan dan anda bisa menggunakan rumus rumus reduksi yang sudah diperoleh sebelumnya.

(1) $\int \cot^2(x)\, dx$
(2) $\int \sec^3(x)\, dx$
(3) $\int \cos^4(x)\, dx$
(4) $\int \tan^5(x)\, dx$
(5) $\int \sec^5(x)\, dx$
(6) $\int \csc^3(x)\, dx$
(7) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx$
(8) $\int \sec^4(3x-1)\, dx$

Hitung setiap integral berikut ini.

(1) $\int \sin^5(x)\cos^4(x)\,dx$

(2) $\int \sin^3(x)\cos^5(x)\,dx$

(3) $\int \sin^4(x)\cos^4(x)\,dx$

(4) $\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx$

(5) $\int \tan^5(x)\sec^4(x)\,dx$

(6) $\int \cot^5(x)\csc^4(x)\,dx$

(7) $\int \tan^4(x)\sec^5(x)\,dx$

(8) $\int \cot^4(x)\csc^5(x)\,dx$

(9) $\int \tan^4(x)\sec^4(x)\,dx$

(10) $\int \cot^4(x)\csc^4(x)\,dx$

(11) $\int \tan^3(x)\sec^3(x)\,dx$

(12) $\int \cot^5(x)\csc^5(x)\,dx$

(13) $\int \sin(x)\cos(7x)\,dx$

(14) $\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$

(15) $\int \sin(4x)\cos(4x)\,dx$

(16) $\int \sin(3x)\cos(3x)\,dx$

(17) $\int \sin(2x)\sin(3x)\,dx$

(18) $\int \sin(4x)\sin(6x)\,dx$

(19) $\int \sin(3x)\sin(5x)\,dx$

(20) $\int \cos(3x)\cos(5x)\,dx$

(21) $\int \cos(2x)\cos(4x)\,dx$

Untuk soal (1) – (2) , buktikan setiap rumus reduksi , dimana $n \in N$, dengan cara menyelesaikan masalah integral menggunakan rumus integrasi parsial

(1) $$\int x^n \sinh(x)\,dx = x^n\cosh(x) - nx^{n-1}\sinh(x) + n(n-1)\int x^{n-2}\sinh(x)\,dx$$

(2) $$\int x^n \cosh(x)\,dx = x^n\sinh(x) - nx^{n-1}\cosh(x) + n(n-1)\int x^{n-2}\cosh(x)\,dx$$

Hitung setiap integral berikut ini dan anda bisa menggunakan rumus-rumus reduksi yang sudah diperoleh sebelumnya.

(1) $\int \sinh\ (3x)\ dx$

(2) $\int x \sinh(x)\ dx$

(3) $\int x\ \cosh(x)\, dx$

(4) $\int \text{sech}(ax + b)dx$

(5) $\int \text{csch}(\text{ax} + \text{b})\ dx$

(6) $\int \tanh(ax + b)dx$

(7) $\int \coth(ax + b)\ dx$

(8) $\int \sinh(x) \cosh(x)dx$

(9) $\int \sinh^2(x)\ dx$

(10) $\int \cosh^2(x)dx$

(11) $\int x \cosh^2(x)\ dx$

(12) $\int \sinh^3(x)\ \ dx$

(13) $\int x^2 \sinh x\ dx$

(14) $\int x^2 \cosh(x)dx$

(15) $\int x^3 \sinh(x)dx$

(16) $\int x^3 \cosh(x)dx$

(17) $\int e^{-x} \sinh(x)dx$

(18) $\int e^{-2x} \cosh(2x)dx$

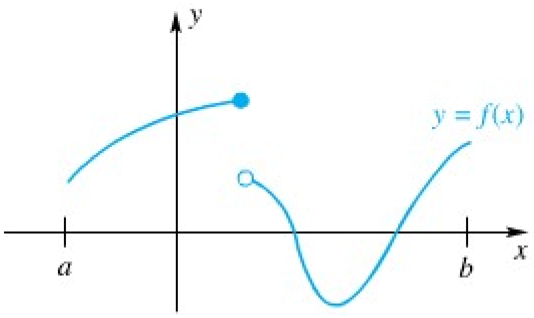
BAB 2

INTEGRAL TENTU

2.1 Jumlah Riemann

Dalam matematika, jumlah Riemann adalah salah satu jenis aproksimasi/hamparan integral menggunakan metode penjumlahan terbatas. Nama metode ini berasal dari seorang ahli matematika Jerman di abad ke-19 bernama Bernhard Riemann.

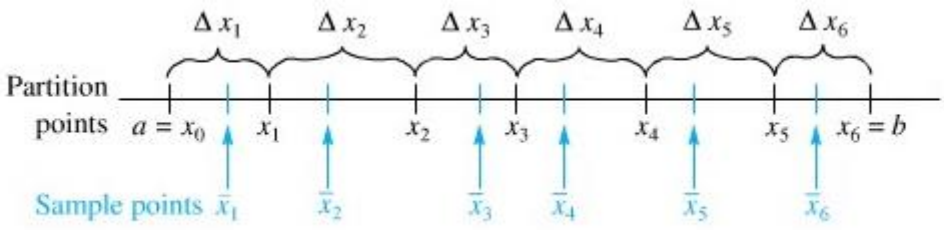
Pandang sebuah fungsi *f* yang didefinisikan pada selang tutup [*a*,*b*].



Fungsi *f* boleh bernilai positif ataupun negative pada selang tersebut dan bahkan tidak perlu kontinu. Grafik fungsi *f* dapat digambarkan seperti pada Gambar 1.

Gambar 2.1

Pandang suatu partisi P dari selang [*a*,*b*] menjadi *n* selang bagian (panjangnya tidak harus sama) memakai titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dan andaikan $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebuah titik sembarang $\overline{x_i}$ (yang mungkin saja sebuah titik ujung); yang disebut sebuah *titik sampel* untuk selang bagian ke – *i.* Sebuah contoh dari konstruksi ini diperlihatkan dalam Gambar 2 untuk *n* = 6.



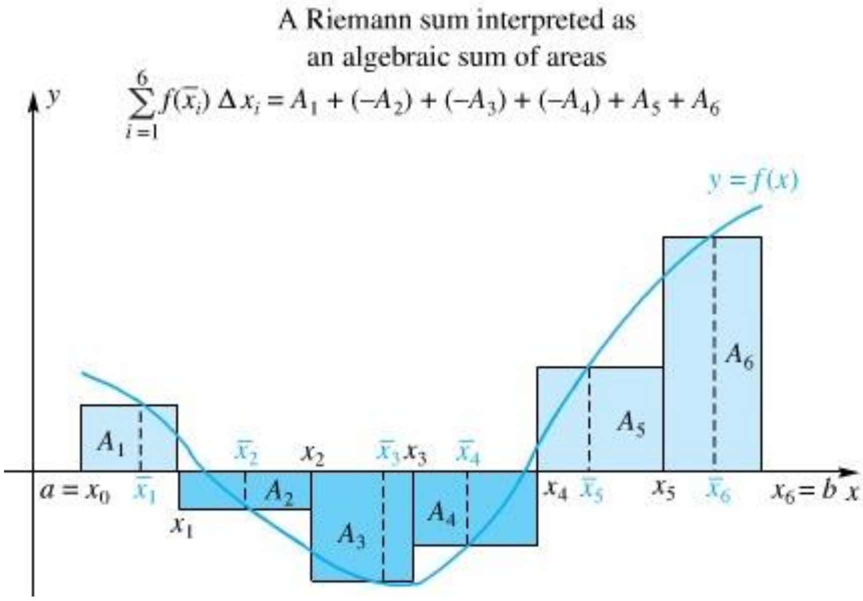
A Partition of [*a*, *b*] with Sample Points $\overline{x}_i$

Gambar 2.2

Bentuklah perjumlahan

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

R_P merupakan jumlah Riemann untuk *f* yang berpadanan dengan partisi *P*. Tafsiran geometrinya diperlihatkan pada Gambar 3. Perhatikan bahwa kontribusi dari persegi panjang di bawah sumbu – *x* adalah negative dari luasnya.



Gambar 2.3

Contoh 1:

Hitung jumlah Riemann untuk $f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ pada selang [0,5] memakai partisi P dengan titik-titik partisi 0 < 1,1 < 2 < 3,2 < 4 < 5 dan titik-titik sampel yang berpadanan $\bar{x}_1 = 0{,}5$; $\bar{x}_2 = 1{,}5$; $\bar{x}_3 = 2{,}5$; $\bar{x}_4 = 3{,}6$; dan $\bar{x}_5 = 5$

Penyelesaian:

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

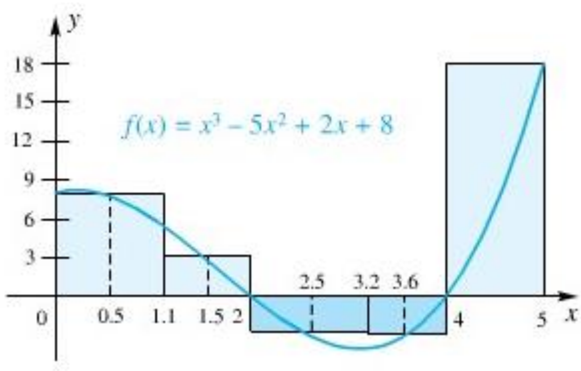
$$= f(\overline{x_1})\Delta x_1 + f(\overline{x_2})\Delta x_2 + f(\overline{x_3})\Delta x_3 + f(\overline{x_4})\Delta x_4 + f(\overline{x_5})\Delta x_5$$

$$= f(0{,}5)(1{,}1-0) + f(1{,}5)(2-1{,}1) + f(2{,}5)(3{,}2-2) + f(3{,}6)(4-3{,}2) + f(5)(5-4)$$

$$= (7{,}875)(1{,}1) + (3{,}125)(0{,}9) + (-2{,}625)(1{,}2) + (-2{,}944)(0{,}8) + 18(1)$$

$$= 23{,}9698$$

Gambar geometri yang berpadanan muncul pada Gambar 2.4



Gambar 2.4

Contoh 2

Hitunglah jumlah Riemann untuk $f(x) = x^2 + 1$ pada selang [-1,2] memakai titik-titik partisi berjarak sama -1 < -0,5 < 0 < 0,5 < 1 < 1,5 < 2, dengan titik-titik sampel $\overline{x_i}$ adalah titik tengah selang bagian ke – *i.*

Penyelesaian:

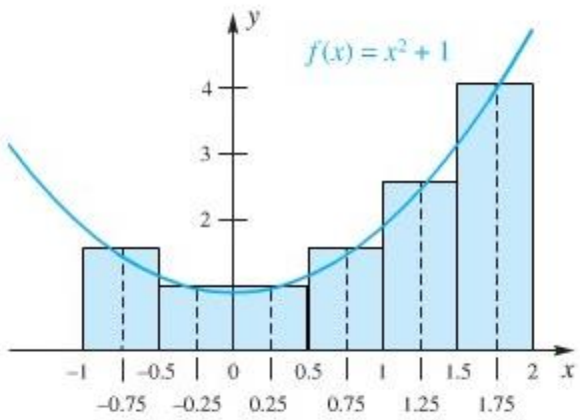
Perhatikan gambaran pada Gambar 5

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$= [f(-07{,}5) + f(-0{,}25) + f(0{,}25) + f(0{,}75) + f(1{,}75)](0{,}5)$$

= [1,5625 + 1,0625 + 1,0625 +1,5625 + 2,5625 + 4,0625](0,5)

= 5,9375



Gambar 2.5

2.2 Definisi Integral Tentu

Andaikan f suatu fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup [a,b]. Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Ada, kita katakan f adalah terintegralkan pada [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu (atau Integral Riemann) f dari a ke b, diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

2.3 Perhitungan Integral Tentu

Dengan mengetahui bahwa suatu fungsi adalah terintegralkan, maka kita dapat menghitung integralnya memakai suatu partisi tetap (selang bagian sama panjang) dan dengan mengambil titik sampel x_i .

Contoh 3. Hitung $\int_{-2}^{3}(x+3)dx$ dengan menggunakan definisi!

Partisikan selang [-2,3] menjadi n selang bagian yang sama, masing-masing dengan panjang $\Delta x = \frac{x_i - x_{i-1}}{n} = \frac{3-(-2)}{n} = \frac{5}{n}$. Dalam tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$ gunakan $\bar{x}_i = x_i$ sebagai titik sampel

Maka,

$$x_0 = -2$$

$$x_1 = -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n}$$

$$x_2 = -2 + 2\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_i = -2 + i\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n = -2 + n\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right)$$

Jadi $f(x_i) = x_i + 3 = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) + 3 = 1 + i\left(\frac{5}{n}\right)$

Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n}$$

$$= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Karena P adalah suatu partisi tetap, $|P| \to 0$ setara dengan $n \to \infty$. Kita simpulkan bahwa

$$\int_{-2}^{3}(x+3)dx = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{35}{2}$$

Contoh 4. Hitung $\int_{-1}^{1}(2x^2-8)dx$

$$x_i = -1 + i\Delta x = -1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$f(x_i) = 2x_i^2 - 8 = 2\left[-1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2 - 8 = -6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2}\right]\frac{4}{n}$$

$$= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{-24}{n}(n) - \frac{64}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{128}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= -24 - 32\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Dapat disimpulkan bahwa

$$\int_{-1}^{1}(2x^2-8)dx = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-24 - 32\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{128}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] = -24 - 32 + \frac{128}{3} = \frac{-40}{3}$$

2.4 Teorema Fundamental Kalkulus Integral

Dalam subbab ini, kita pertama kali akan mendiskusikan suatu hubungan antara integral Rieman dan antiderivatif. Hubungan ini memampukan kita untuk menghitung integral Rieman dengan secara sederhana mencari suatu antiderivatif dari fungsi yang diberikan.

Proposisi 2.1

Diandaikan bahwa f (x) adalah suatu fungsi kontinu dalan integral tertutup [a,b], dimana $a, b \epsilon \mathbb{R}$ *dan a < b . jika fungsi F (x) adalah suatu antiderivatif dari f (x) dalam [a,b], maka*

$$\boxed{\int_a^b f\ (x)\ dx = [\ F\ (x)\ ]_{x=a}^{x=b}\ = F\ \ (b) -\ F\ (a)}$$

Contoh 5.

$$\int_{\pi}^{2\pi} (\ x^2 +\ 2\sin(x))\ \ d\,x \quad = \left[\frac{1}{3}\ x^3 -\ 2\cos(x)\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{8}{3}\pi^3 -\ 2\cos(2\pi)\right) - \left(\frac{1}{3}\pi^3 -\ 2\cos\ (\pi)\right)$$

$$= \frac{7}{3}\pi^3 - 4$$

Contoh 6.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1} - \cos(x)\sin(x)\ dx \quad = \left[\frac{2}{3}(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3}\ (\ 1 - \cos(\pi))^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\ (1 - \cos(0))^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Proposisi 2.2 *Diandaikan bahwa f (x) adalah suatu fungsi kontinu dalam interval tertutup [a,b], dimana a, b a* $\in \mathbb{R}$ *dan a < b . maka*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \ dx = -\int_b^a f\ (x)\ dx.}$$

Proposisi 2.3 *Diandaikan bahwa f (x) adalah suatu fungsi kontinu dalam interval tertutup [a,b] , dimna a, b* $\in \mathbb{R}$ *dan a < b. Jika c* $\in$ *[a, b], maka*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f\ (x)\ dx\ +\ \int_c^b f(x)\ dx}$$

Proposisi 2.4 *jika f (x) dan g (x) adalah fungsi-fungsi kontinu dalam interval tertutup [a,b], dimana a, b* $\in \mathbb{R}$ *dan a < b , maka*

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x) +\ g\ (x)\big)\ dx\ =\ \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.}$$

Lebih lanjut, untuk setiap bilangan riil k $\in \mathbb{R}$*, dipunyai*

$$\boxed{\int kf\ (x)\ dx = k\ \int_a^b f\ (x)\ dx.}$$

Latihan

Dalam soal 1-5, hitung setiap integral tentu.

(1) $\int_{-1}^{1} 2x^2 \ dx$

(2) $\int_{-2}^{2} x^2 \ dx$

(3) $\int_{-2}^{-1} x^{-2} \ dx$

(4) $\int_{0}^{-4} 2\sqrt{x} \ dx$

(5) $\int_{-3}^{-2} x^{-2} \ dx$

Dalam Soal 6-20, tentukan luas bidang datar dari daerah dibawah kurva *y = f (x) dari a sampai b*

(6) $y = 2x, a = 0, b = 2$

(7) $y = \frac{1}{x}, a = 1, \ b = 3$

(8) $y = x^2, a = 0, \ b = 3$

(9) $y = x^3, a = 0, \ b = 2$

(10) $y = 4 - x^2, a = -2, \ b = 2$

(11) $y = \sqrt{x+2}, a = -2, \ b = 2$

(12) $y = 9x - x^2, a = 0, \ b = 3$

(13) $y = \sqrt{x} - x, a = 0, \ b = 1$

(14) $y = 3x^{\frac{1}{3}}, a = 1, b = 8$

(15) $y = \frac{1}{1+x}, a = 0, \ b = 3$

(16) $y = \frac{1}{1+x^2}, a = 0, b = 1$

(17) $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, a = 0, \ b = 1$

(18) $y = \frac{1}{1+x^2}, a = 0, b = 1$

(19) $y = \frac{1}{4+x^2}, a = 0, b = 2$

(20) $y = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}, a = 0, b = 2$

BAB 3
TEKNIK PENGINTEGRALAN

3.1 Pengintegralan dengan Substitusi Sederahana

Sekarang didiskusikan bagaimana kita dapat menggunakan aturan rantai dalam diferensiasi untuk membantu menyelesaikan masalah dalam integrasi. Teknik ini biasanya dinamakan integrasi subtitusi. Perlu di tekankan bahwa teknik tersebut tidak selalu dapat digunakan. Pertama, kita mengetahui antidefiratif dari fungsi. Kedua, tidak ada jalan sederhana dimana kita dapat menggambarkannya untuk menolong kita mencari subtitusi yang sesuai dalam kasusdimana teknik dapat digunakan. Disisi lain, ketika teknik dapat digunakan, mungkin terdapat lebih dari satu subtitusi yang sesuai.

INTEGRASI DENGAN SUBTITUSI- VERSI 1. Jika kita membuat subtitusi

$x = g\ (u)$, maka $dx = g'(u)du$, dan

$$\int f\ (x)dx = \int f\ \big(g(u)\big)g'(u)$$

INTEGRASI DENGAN SUBTITUSI- VERSI 2. Diandaikan bahwa suatu fungsi $f(x)$dapat ditulis dalam bentuk $f\ (x) = g\ \big(h(x)\big)h'(x)$. Jika kita membuat subtitusi $u = h\ (x)$, maka $du = h'(x)dx$, dan

$$\int f\ \ (x)dx = \int g\ \big(h(x)\big)h'(x) = \int g\ (u)du.$$

Dicatat bahwa Versi 1, variabel x pada awalnya ditulis sebagai fungsi dari variabel baru u, sedangkan dalam Versi 2, variabel u dituliskan sebagai fungsi dari x. Bedanya untuk subtitusi $x = g\ (u)$dalam versi 1 harus mempunyai invers agar variabel u bisa dikembalikan ke variabel asli x di akhir proses.

Contoh 1. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int x(x^2+3)^4 dx$$

Pertama kali dicatat bahwa derivatif dari fungsi x^2+3 sama dengan 2x, sehingga ini tepat untuk membuat substitusi $u=x^2+3$. Selanjutnya du=2x dx, dan

$\int x(x^2+3)^4\, dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+3)^4\, dx = \frac{1}{2}\int u^4\, du = \frac{1}{10}u^5 + k = \frac{1}{10}(x^2+3)^5 + k.$

contoh 2. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int \frac{1}{xIn(x)}\,dx.$$

Pertama kali dicatat bahwa derivative dari fungsi In (x) sama dengan $\frac{1}{x}$, sehingga ini tepat untuk membuat substitusi u=In(x). Selanjutnya du= $\frac{1}{x}$ dx, dan

$$\int \frac{1}{xIn(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = In \mid u \mid + k = In \mid In(x) \mid + k.$$

Contoh 3. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int x^2 e^{x3}\,dx.$$

Pertama kali dicatat bahwa derivative dari fungsi x^3sama dengan $3x^2$, sehingga ini tepat untuk membuat subsitusi $u=x^3$. Selanjutnya $du=3x^2dx$, dan

$$\int x^2 e^{x3}\,dx = \frac{1}{3}\int 3\,x^2 e^{x3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}\ e^u + k = \frac{1}{3}\ e^{x3} + k.$$

Contoh 4. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int tan^3(x)\sec^2(x)\,dx.$$

pertama kali dicatat bahwa derivative dari fungsi tan (x) sama dengan $\sec^2(x)$,sehingga ini tepat untuk membuat substitusi u=tan (x). Selanjutnya $du=\sec^2(x)dx$, dan

$$\int tan^3(x)\sec^2(x)\,dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + k = \frac{1}{4}\ \tan^4(x) + k.$$

Kadang-kadang, kemungkinan dari substitusi tidak bias terlihat secara jelas dengan cepat, dan banyak terjadi trial dan error. Kenyataan bahwa suatu substitusi tidak terlihat muncul bukan berarti bahwa metode tersebut gagal. Ini bisa terjadi dalam kasus ketika kita menggunakan suatu substitusi yang tidak sesuai.Atau barang kali kita pertama kali melupakan modifikasi dari masalah.Hal ini diilustrasikan dalam contoh berikut ini.

Contoh 5. Diperhatikan integral taktentu

$$\int tan\,(x)\,dx.$$

Disini tidak terlihat sembarang substitusi yang akan digunakan. Tetapi, jika dituliskan

$$\int tan\,(x)\,dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}\ dx,$$

Maka kita mengamati bahwa derivative dari fungsi cos(x) sama dengan – sin (x), sehingga ini tepat untuk membuat substitusi u = cos (x). Selanjutnya du = - sin (x) dx, dan

$$\int tan\,(x)\;dx = -\int \frac{sin(x)}{cos(x)}\;dx = \int \frac{1}{u} du = -In\,|\,u\,| + k = -In\;|cos\;(x)| + k.$$

Lebih lanjut, berikut ini diperoleh rumus-rumus antiderivatif dari fungsi eksponensial dan trigonometri yang lebih umum dari pada fungsi dalam subbab sebelumnya, dengan cara membuat substitusi u = px + pq dan du = p dx.

(a) $\int (px+q)^{n}\,dx = \frac{1}{p(n+1)}(px+q)^{n+1} + k$

(b) $\int (px+q)^{-1}\,dx = \frac{1}{p}\;|\,n\,|\,px+q\,| + k$

(c) $\int a^{px+q}\,dx = \frac{1}{pIn(a)}a^{pz+q} + k$, jika a > 0 . a ≠ 1.

(d) $\int a^{px+q}\,dx = \frac{1}{p}e^{p\,x\,+\,q} + k$

(e) $\int cos\,(px+q)dx = \frac{1}{p}\sin(px+q) + k.$

(f) $\int sin\,(px+q)dx = -\frac{1}{p}\cos(px+q) + k.$

(g) $\int csc^{2}(px+q)\,dx = -\frac{1}{p}\cot(px+q) + k.$

(h) $\int sec^{2}(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\tan(px+q) + k.$

(i) $\int cot\,(px+q)\;\csc(px+q)\,dx = -\frac{1}{p}\csc(px+q) + k.$

(j) $\int tan\,(px+q)\;\sec(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\sec(px+q) + k.$

(k) $\int cot\,(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\ln|(px+q)| + k.$

(l) $\int tan\,(px+q)\,dx = -\frac{1}{p}\ln|\cos(px+q)| + k.$

(m) $\int csc\,(px+q)\,dx = -\frac{1}{p}\ln|\csc(px+q) + \cot(px+q)| + k.$

(n) $\int sec\,(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\;|\sec(px+q) + \tan(px+q)|\;k$

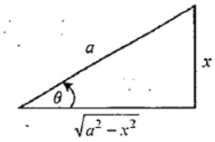
3.2 Substitusi Trigonometri

Integral yang memuat salah satu dari

$$a^2 - x^2, \quad a^2 + x^2, \quad x^2 - a^2$$

sering kali dapat di integralkan dengan suatu subtitusi trigonometri. Idenya adalah mengambil $x, a,$ dan akar kuadrat sebagai sisi sisi dari suatu segitiga siku siku dan menggunakan salah satu sudut lancip sebagai suatu variabel θ . Terdapat 3 subtitusi trigonometri yang diberikan dalan sub bab ini.

BENTUK-BENTUK $a^2 - x^2$, diandaikan bahwa $x = a\sin\theta$ dengan $a > 0$. Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku siku seperti berikut :



Selanjutnya diperoleh

$$dx = a\cos(\theta)\, d\theta, \qquad a^2 - x^2 = a^2 cos^2(\theta)$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos(\theta)\,, \;\; \theta = arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\sin(\theta) = \frac{x}{a}, \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad \tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\csc(\theta) = \frac{a}{x}, \quad \sec(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \cot(\theta) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

Dengan penggunaan substitusi di atas diperoleh rumus-rumus integrasi berikut:

(1) $\int \frac{x}{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{2} ln|a^2 - x^2| + k$

(2) $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + k$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + k$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + k$

(5) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{1}{a} ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + k$

(6) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + k$

Contoh 6. Perhatikan integral tak tentu

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}} dx$$

Diambil substitusi $x = 3\sin(\theta)\,,\; dx = 3\cos(\theta)\, d\theta$ maka

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx = 27\int \frac{sin^3(\theta)}{\sqrt{1-sin^2(\theta)}}\cos(\theta)\, d\theta = 27\int sin^3(\theta)d\theta$$

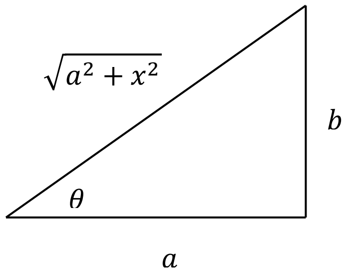
$$= 27\left(-\tfrac{1}{3}sin^2(\theta)\cos(\theta) - \tfrac{2}{3}\cos(\theta)\right) + k$$

$$= 27.\tfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}\left(-\tfrac{1}{3}\,.\tfrac{x^2}{9} - \tfrac{2}{3}\right) + k$$

$$= 9\sqrt{9-x^2}\left(-\tfrac{1}{27}x^2 - \tfrac{2}{3}\right) + k$$

BENTUK-BENTUK $a^2 + x^2$.diandaikan bahwa x= $a\tan(\theta)$ dengan$\alpha > 0$.

Kondisi ini dapat dinyatakan pada suatu segitiga siku-siku seperti berikut:



Selanjutnya diperoleh:

dx= $asec^2(\theta)$ dθ,$a^2 + x^2 = a^2sec^2(\theta)$,

$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec(\theta)$, $\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$,

Sin$(\theta) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$,cos$(\theta) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$,tan$(\theta) = \frac{x}{a}$,

Csc$(\theta) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$,csc$(\theta) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$,cot$(\theta) = \frac{a}{x}$

Dengan penggunaan substitusi diatas diperoleh rumus-rumus integrasi berikut:

(1) $\int \frac{X}{\sqrt{a^2+X^2}}$ dx= $\frac{1}{2}$In$|a^2 + x^2|+k$

(2) $\int \frac{1}{a^2+x^2}$dx= $\frac{1}{a}$arctan$\left(\frac{x}{a}\right) + k$

(3) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ dx= $\sqrt{a^2 + x^2 + k}$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = In\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + k$

(5) $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}$dx= $\frac{1}{a}In\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right| + k$

(6) $\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{a^2}{2}In\left|x + \sqrt{a^2+x^2}\right| + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + k$

Contoh 7. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

Diambil substitusi x= $\sqrt{2}\tan(\theta)\,,dx = \sqrt{2}sec^2(\theta)d\theta, maka$

$$\int \frac{1}{(x^x+2)^2}dx = \int \frac{\sqrt{2}sec^2(\theta)}{(2tan^2(\theta)+2)^2}d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1}{sec^2(\theta)}d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int cos^2(\theta)+2)^2 \mathrm{d}\theta$$

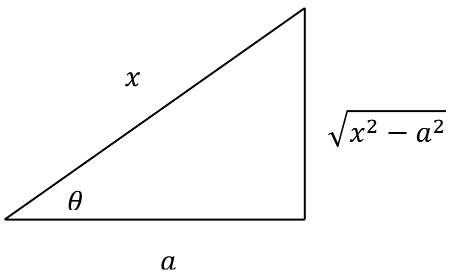
Selanjutnya bisa digunakan rumus reduksi dari $\cos^n(\theta) untuk\ mendapatkan$

$$\int \frac{1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) - \frac{1}{2}\right) + k$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}}.\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{1}{2}arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) + k$$

$$= \frac{x}{4(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k$$

BENTUK-BENTUK $x^2 - a^2. diandaikan\ bahwa\ x\ = a\sec(\theta)\ dengan\ a > 0\ kondisi\ ini\ dapat\ dinyatakan\ pada\ suatu\ segitiga\ siku - siku\ seperti\ ini$



Selanjutnya diperoleh

$$dx\ = a\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta\ ,\ \ x^2 - a^2 = a^2\,tan^2\,(\theta),$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\tan(\theta), \theta = arcsec\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}, \cos(\theta) = \frac{a}{x}, \tan(\theta) = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

$$\csc(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}, \sec(\theta) = \frac{x}{a}, \cot(\theta) = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Dengan pemggunaan substitusi diatas diperoleh rumus-rumus integrasi berikut:

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\ = \frac{1}{2}In\,|x^2-a^2| + k$ (2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx\ = \frac{1}{2a}In\,\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + k$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx \; = \sqrt{x^2 - a^2} + k$

(4) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \; = In\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + k$

(5) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = -\frac{a^2}{2} In \;|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} + k$

Contoh 8. Diperhatikan integral tak tentu

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4^2}}{x - 2} dx$$

Dipunyai

x^2 −4x= $(x^2 - 4x + 4) - 4 = ((x - 2)^2 - 4 = u^2 - 4$

Dimana kita menggunakan substitusi u= $x - 2. karena\ itu$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x - 2} dx = \int \frac{\sqrt{u^2} - 4}{u} du.$$

Untuk menghitung integral diruaskan digunakan substitusi trigonometri u=
$2\sec(\theta)\,, du = 2\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta, maka$

$$\int \frac{\sqrt{u^2 - 4}}{u} du = \int \frac{\sqrt{sec^2(\theta) - 4}}{2\sec(\theta)} 2\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta = 2\int tan^2(\theta) d\theta$$

$$= 2(\tan(\theta) - \theta) + k = 2\left(\frac{\sqrt{u^2 - 4}}{2} - arcsec\left(\frac{u}{2}\right)\right) + k$$

Oleh karna itu,dengan substitusi u= $x - 2\ diperoleh$

$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$dx= $\sqrt{x^2 - 4x} - 2\, arcsec\left(\frac{x-2}{2}\right) + k$

3.3 Pengintegralan Parsial

Aturan hasil kali dari diferensiasi menghasilkan suatu intergrasi yang dikenal sebagai integrasi parsial. Dimulai dengan aturan hasil kali:

$$\frac{d}{dx} (\mathrm{u}\ (\mathrm{x})\ \mathrm{u}\ (\mathrm{x})) = \frac{du\ (x)}{dx} \mathrm{v}\ (\mathrm{x}) + \mathrm{u}\ (\mathrm{x}) \frac{dv(x)}{dx}$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk diferensial menjadi

$$\mathrm{d}\ [\mathrm{u}\ (\mathrm{x})\ \mathrm{v}\ (\mathrm{x})] = \left[v\ (x) \frac{du\ (x)}{dx} + u\ (x) \frac{dv\ (x)}{dx}\right] dx.$$

Selanjutnya kedua ruas diintegralkan untuk memperoleh

$$\int d\,[u\,(x) v\,(x)] = \int v\,(x) \frac{du\,(x)}{dx} dx + \int u\,(x) \frac{dv\,(x)}{dx} dx$$

u (x) v (x) = $\int v\,(x) u'(x)\,dx + \int u\,(x)\, v'(x)\,dx.$

Bentuk baku dari rumus integral parsial tersebut dituliskan sebagai

$$\int u\,(x)\, v'\,(x) = u\,(x) v\,(x) - \int v\,(x)\, u'(x)\,dx$$

Atau disingkat menjadi

$$\boxed{\int \boldsymbol{u\,dv = uv - \int v\,du}} \qquad (1.1)$$

Dalam hal ini penyelesaian dituntut untuk mampu memilih u dan dv yang tepat sehingga rumus (1.1) bisa diaplikasikan.

Contoh 9. *diperhatikan integral tak tentu*

$$\int x\,cos(x)\,dx.$$

Untuk menghitung integral di atas, diambil u = x dan dv = $cos(x)\,dx$ *dengan du = dx dan v =* $\int cos(x)\,dx = sin(x) + k$. *Kita menghilangkan konstanta k, karena kita hanya memerlukan v (x). Selanjutnya, berdasarkan rumus integrasi parsial (1.1) diperoleh*

$$\int x\,cos(x)\,dx = x\ sin(x) - \int sin(x)\,dx = x\ sin(x) + cos(x) + c.$$

Contoh 10. *Diperhatikan integral tak tentu*

$$\int x^2\ \sin x\ dx$$

Untuk menghitung integral di atas, diambil u = x^2 *dan dv =* $sin(x)\,dx$ *dengan du = 2x dx dan v =* $\int sin(x)\,dx = -\,cos(x)$. *Jadi,*

$$\int x^2\ sin(x)\ dx = -x^2\ cos(x) - \int -cos(x)\,2x\ dx$$

$$= -x^2\,cos(x) + 2\int x\ cos(x)\,dx$$

$$= -x^2\ cos(x) + 2\,(x\ sin(x) + cos(x)) + k$$

Contoh 11. *Diperhatikan integral tak tentu*

$$\int ln(x)\,dx$$

Diambil u = $ln(x)$ *dan dv = dx dengan du =* $\frac{1}{x}dx$ *dan v = x. Jadi,*

$$\int ln(x)\,dx = x\,ln(x) - \int x.\frac{1}{x}dx = x\,ln(x) - x + k$$

Contoh 12. *Diperhatikan integral tak tentu*

$$\int x^2\, e^x\ dx$$

Pertama kali diambil u =x^2 *dan dv =*e^x *dx dengan du =2x, v =*$\int e^x\, dx = e^x$

Diperoleh $\int x^2\, e^x\ dx = x^2\, e^x - \int 2xe^x\ dx = x^2\, e^x - 2\int xe^x\ dx$

$Untuk\ menghitung\ integral\ terakhir, diambil\ u = x\ dan\ dv = e^x dx\quad dengan\ du = dx\ dan$

$v = e^x.\ Diperoleh$

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + k.$$

$jadi,$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + k) = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

$\boldsymbol{contoh}\ \mathbf{13}. Diperhatikan\ integral\ tak\ tentu$

$$\int e^x \cos(x)\, dx.$$

$Untuk\ menghitung\ integral\ di\ atas, diambil\ u = e^x\ dan\ dv = \cos(x)\ dengan$

$$du = e^x dx\ dan\ v = \int \cos(x)\, dx = \sin(x)\,. Diperoleh$$

$$\int e^x\ cosxdx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx.$$

$Untuk\ menghitung\ integral\ terakhir, diambil\ substitusi\ u = e^x\ dan$

$$dv = \sin(x)\, dx$$

$dengan\ du = e^x dx\ dan\ v = -cosx. Diperoleh$

$$\int e^x \sin(x)\, dx = -e^x \cos(x) - \int -\cos(x)\, dx = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\, dx.$$

$Oleh\ karena\ itu, sekarang\ dipunyai$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) - (-e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)\, dx).$$

$Dan\ selanjutnya\ kita\ menggunakan\ aljabar\ untuk\ menyelesaikan\ integral\ seperti\ berikut:$

$$\int e^x \cos(x)\, dx + \int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x\ (\sin(x) + e^x \cos(x)) + k.$$

$\boldsymbol{Contoh\ 14}.\ Dicari\ rumus\ reduksi\ untuk\ integral - integral\ berikut:$

$$\int x^n\, e^x, \int x^n \ln(x)\, dx, \int ln^n(x) dx, \int x^n \sin(x)\, dx, \int x^n \cos(x) dx,$$

$$\int e^{nx+b} \sin(px+q)\, dx, \int e^{nx+b} \cos(px+q)\, dx$$

$dimana\ n \in N.$

$(\boldsymbol{a})\ Diambil\ u = x^n\ dan\ dv = e^x dx\ dengan\ du = nx^{n-1} dx\ dan\ v = e^x, maka$

$$\int x^n\, e^x dx = x^n e^x - \int e^x\, (nx^{n-1}) dx.$$

$Jadi,$

$$\boxed{\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n \int e^x x^{n-1}\, dx.}$$

$(\boldsymbol{b})\ Diambil\ u = \ln(x)\ dan\ dv = x^n\ dengan\ du = \frac{1}{x} dx\ dan\ v = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, maka$

$$\begin{aligned} \int x^n \ln(x)\, dx &= \ln(x) \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} . \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx \\ &= \frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + k. \end{aligned}$$

$Jadi,$

$$\boxed{\begin{aligned} \int x^n \ln(x)\, dx = &\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} [(n+1) \ln(x) - 1] \\ &+ \mathrm{k}. \end{aligned}}$$

$(\boldsymbol{c})\ Diambil\ u = ln^n(x)\ dan\ dv = dx\ dengan\ du = n\ ln^{n-1}(x). \frac{1}{x} dx\ dan\ v = x, maka$

$\int ln^n(x) dx = x\ ln^n\, (x) - \int x. n\ ln^{n-1}\, (x). \frac{1}{x} dx.$

$Jadi,$

$$\boxed{\begin{aligned} \int ln^n(x) dx = &\, x ln^n\, (x) \\ &- n \int ln^{n-1}\, (x) dx \end{aligned}}$$

$(\boldsymbol{d})$ $Diambil\ u = x^n\ dan\ dv = \sin(x)\, dx\ dengan\ du = n.x^{n-1}dx\ dan\ v = -\cos(x)\, , maka$

$$\int x^n \sin(x)\, dx = -x^n \cos(x) - \int (-\cos(x))nx^{n-1}\, dx$$

$$= -x^n \cos(x) + n \int x^{n-1} \cos(x)\, dx. \qquad (1.2)$$

$Untuk\ menghitung\ integral\ terakhir, diambil\ u = x^{n-1}\ dan\ dv = \cos(x)\, dx\ dengan$

$du = (n-1)x^{n-2} dxdan\ v = \sin(x)\, , maka$

$$\int x^{n-1} \cos(x)\, dx = x^{n-1} \sin(x) - \int \sin(x)\, .\,(n-1)\, x^{n-2} dx$$

$$= x^{n-1} \sin(x) - (n-1) \int x^{n-2} \sin(x)\, dx \qquad (1.3)$$

$Dengan\ substitusi\ (1.3) ke\ (1.2), diperoleh\ rumus\ reduksi$

$$\boxed{\int x^n \sin(x)\, dx = -x^n \cos(x) + n.x^{n-1} \sin(x) - n(n-1) \int x^{n-2} \sin(x)\, dx.}$$

$(\boldsymbol{e})$ $Dengan\ menggunakan\ (1.3)\ dan\ (1.2)\ diperoleh$

$$\int x^{n-1} \cos(x)\, dx = x^{n-1} \sin(x) - (n-1) \int x^{n-2} \sin(x)\, dx$$

$$= \int x^{n-1} \sin(x) - (n-1) \left[-x^{n-2} \cos(x) + (n-2) \int x^{n-3} \cos(x) dx \right]$$

$$= x^{n-1} \sin(x) + (n-1)x^{n-2} \cos(x) - (n-1)(n-2) \int x^{n-3} \cos(x) dx.$$

$Jika\ kita\ mengganti\ n\ dengan\ n+1\ pada\ persamaan\ terakhir, maka$

$$\boxed{\int x^n \cos(x)\, dx = x^n \sin(x) + nx^{n-1} \cos(x) - n(n-1) \int x^{n-2} \cos(x) dx.}$$

$(\boldsymbol{f})$ $Diambil\ u = \sin(px+q)\ dan\ dv = e^{ax+b} dx\ dengan\ du = p\cos(px+q)\, dx\ dan$

$v = \dfrac{1}{a} e^{ax+b}\, , maka$

$$\int e^{ax+b} \sin(px+q)\, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} \sin(px+q) - \frac{p}{a} \int e^{ax+b} \cos(px+q)\, dx.$$

$Dalam\ integral\ terakhir, diambil\ u = \cos(px+q)\ \ dan\ dv = e^{ax+b}dx\ dengan$

$$du = -p\sin(px+q)\ dan\ v = \frac{1}{a}e^{ax+b}, maka$$

$$\int e^{ax+b}\sin(px+q)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}\cos(px+q) + \frac{p}{a}\int e^{ax+b}\sin(px+q)\,dx. \qquad (1.4)$$

$Karena\ itu\ diperoleh$

$$\int e^{ax+b}\sin(px+q)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}\sin\ (px+q) - \frac{p}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax+b}\cos\ (px+q)\right.$$

$$\left.+\frac{p}{a}\int e^{ax+b}\sin\ (px+q)\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{ax+b}}{a^2}[\text{a}\sin(px+r) - p\cos(px+q)]$$

$$-\frac{p^2}{a^2}\int e^{ax+b}\sin(px+q)\,dx.$$

$Dibawa\ suku\ terakhir\ di\ ruas\ kanan\ ke\ ruas\ kiri\ untuk\ mendapatkan$

$$\left(1+\frac{p^2}{a^2}\right)\int e^{ax+b}\sin(px+q)\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a^2}[\text{a}\sin(px+q) - p\cos(px+q)].$$

$Jadi,$

$$\boxed{\int e^{ax+b}\sin(px+q)\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a^2+p^2}[\text{a}\sin(px+q) - p\cos(px+q)] + k.}$$

(g) Jika (1,5) disubstitusikan ke 4 tanpa konstanta k, diperoleh

$\int e^{ax+b}\cos(px+q)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}\cos(px+q) + \frac{p}{q}.\frac{e^{ax+b}}{a^{2+p^2}}[a\sin(px+q) - p\cos(px+q)]$+k

$= e^{ax+b}\{\frac{1}{a}\cos(px+q) + \frac{1}{a^{2+p^2}}[\text{p}\sin(px+q) - \frac{p^2}{a}\cos(px+q)]\}$+k

Jadi,

$$\int e^{ax+b}\cos(px+q)dx = \frac{e^{ax+b}}{a^{2+p^2}}[\text{p}\sin(px+q) + a\cos(px+q)]\text{+k}.$$

3.4 Integral Fungsi Rasional

Pada subab ini didiskusikan masalah integrasi fungsi rasional berbentuk

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

Dimana p (x) adalah polynomial yang tidak mempunyai factor persekutuan. Idenya adalah menuliskan kembali fungsi rasional sebagai suatu jumlah dari pecahan lebih sederhana yang dinamakan pecahan parsial. Ini dapat dilakukan dengan cara seperti berikut:

(1) Jika derajat P (x) lebih besar atau sama dengan derajat dari Q (x), maka di gunakan pembagian panjang dari polynomial untuk mendapat suatu hasil bagi p (x) dan suatu sisa r (x), sehingga fungsi rasional dituliskan kembali sebagai

$$R\ (x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p\ (x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Dimana derajat dari r (x) lebih kecil dari pada derajat dari Q (x).

(2) Faktorisasi penyebut: Q (x) = q1 (x) q2 (x)…. qk (x), dimana setiap factor qi (x) mempunyai bentuk linier ax+b, atau kuadratik irreducible (tidak bisa di faktorkan lagi) ax^2+ bx+c, atau suatu pangkat berbentuk $(ax+b)^n$ atau $(ax^2 + bx + c)n$.

(3) $\frac{r(x)}{Q(x)}$ dinyatakan sebagai jumlah dari pecahan-pecahan parsial. Jika $(ax+b)^n$ muncul dalam faktorisasi dari Q (x), jumlah dari pecahan parsial akan memuat suku-suku berikut:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

dimana $A_1, A_2,…, A_n$ adalah konstanta-konstanta tertentu. Jika muncul bentuk

$(ax^2 + bx + c)^m$, jumlahan dari pecahan parsial akan memuat

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2+bx+c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2+bx+c)^m},$$

dimana $B_1, B_2, \ldots, B_m$ dan $C_1, C_2, \ldots, C_m$ adalah konstanta-konstanta tertentu.

Pecahan parsial bertipe $\frac{A}{(ax+b)^n}$ secara mudah diintegralkan menggunakan Aturan Pangkat

$$\int \mathrm{u}^{\mathrm{n}}\, dx = \frac{1}{n+1} u^{\mathrm{n}+1} + k, n \neq -1;\ dan\ \int \frac{1}{u}\, du = ln|u| + k.$$

pecahan parsial bertipe $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^m}$ dapat diintegralkan seperti berikut.

Pertama kali penyebut dibagi oleh a^m sehingga pecahan mempunyai bentuk lebih sederhana:

$$\frac{Bx + C}{a^m(x^2 + b_1x + c_1)^m}.$$

Jika dilakukan perlengkapan kuadrat dengan membuat substitusi $\mathrm{u} = \mathrm{x} + \frac{1}{2}\mathrm{b}_1$, kika memperoleh

$$x^2 + b_1x + c_1 = u^2\left(\mathrm{c}_1 - \frac{1}{4}\mathrm{b}_1^2\right) = \mathrm{u}^2 + \mathrm{k}^2,$$

Dimana $k = c_1 - \frac{1}{4}b_1^2$. Sekarang integral mengambil bentuk lebih sederhana:

$$\frac{1}{a^m}\int \frac{Bu + C}{(u^2 + k^2)^m}\, du = \frac{1}{a^m}\int \frac{Bu}{(u^2 + k^2)^m}\, du + \frac{1}{a^m}\int \frac{C}{(u^2 + k^2)^m}\, du.$$

Integral pertama di ruas kanan dapat dihitung dengan mengambil $\omega = u^2 + k^2, d\omega = 2u\, du$. Integral kedua dapat dihitung dengan substitusi trigonometri $u = k\tan(\theta)$, yang akhirnya diselesaikan menggunakan rumus reduksi untuk $\cos(x)$.

Untuk mencari pecahan parsial, kita harus menyelesaikan untuk konstanta-konstanta tak diketahui A_i, B_i, dan C_i. Dalam tiga contoh pertama berikut ini ditunjukkan bagaimana hal tersebut dilakukan.

Contoh 15. *Diperhatikan fungsi rasional*

$$\frac{5x + 17}{x^2 - 3x - 10}.$$

Pertama kali kita memfaktorkan penyebut:

$$x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5).$$

Karena terdapat dua faktor linear, maka haruslah dibentuk jumlahan dari dua pecahan parsial:

$$\frac{5x+17}{x^2-3x-10}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-5}.$$

Cara kita mencari A dan B adalah dengan menggunakan $(x+2)(x-5)$ *sebagai suatu penyebut persekutuan sehingga pembilang dari kedua ruas persamaan adalah sama.*

$$\frac{5x+17}{x^2-3x-10} = \frac{A(x-5)+B(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

$$5x+17 = A(x-5)+B(x+2).$$

Penyelesaian untuk A dan B dapat dicari dengan mensubstitusikan sembarang dua nilai x (untuk kemudahan biasannya diambil akar-akar dari penyebut):

$$x=-2 \quad \Longrightarrow 5.(-2)+17=A.(-7)+0 \Longrightarrow A=-1;$$

$$x=5 \quad \Longrightarrow 5.5+17=0+B.7 \Rightarrow B=6.$$

Oleh karena itu,

$$\frac{5x+17}{x^2-3x-10}=\frac{-1}{x+2}+\frac{6}{x-5}.$$

Contoh 16. *Diperhatikan fungsi rasional*

$$\frac{2x^3+x+1}{x^4-2x^3+x^2}.$$

Faktorisasi dari penyebut yaitu

$$x^4+2x^3+x^2=x^2(x^2+2x+1)=x^2(x+1)^2.$$

Karena terdapat empat faktor linear (tidak harus berbeda), maka dibentuk jumlahan dari empat pecahan parsial:

$$\frac{2x^3+x+1}{x^2+2x^3+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{D}{(x+1)^2}.$$

Disamakan penyebut dari kedua ruas untuk memperoleh:

$$\frac{2x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2}{x^2(x+1)^2}$$

$$2x^3 + x + 1 = Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2.$$

Penyelesaian untuk A, B, C, dan D dapat dicari dengan memsubstistusikan sembarang empat nilai x:

$x = 0 \quad \Rightarrow 0 + 0 + 1 = 0 = B + 0 + 0 \Rightarrow B = 1;$

$x = -1 \quad \Rightarrow -2 + (-1) + 1 = 0 + 0 + 0 + D \Rightarrow D = -2;$

$x = 1 \quad \Rightarrow 2 + 1 + 1 = 4A + 4 + 2C + (-2) \Rightarrow 2A + C = 1;$

$x = 2 \quad \Rightarrow 16 + 2 + 1 = 18A + 9 + 12C + (-8) \Rightarrow 3A + 2C = 3.$

Penyelesaian untuk dua persamaan terakhir yaitu A=-1 *dan C=* 3*. Oleh karena itu,*

$$\frac{2x^3 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2}$$

Contoh 17. *Diperhatikan fungsi rasional*

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x+1)(x^2 + 2x + 3)^2}.$$

Karena dapat tiga faktor, maka dibentuk jumlahan dari tiga pecahan parsial;

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x+1)(x^2 + 2x + 3x)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$$

Disamakan penyebut dari kedua ruas untuk memperoleh:

$$x^4x + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 =$$

$$A(x^2 + 2x + 3)^2 + (Bx + C)(x+1)(x^2 + 2x + 3) + (Dx + E)(x + 1)$$

Penyelesaian untuk A, B, C, D, dan E dapat dicari dengan memsubstistusikan sembarang lima nilai x:

$x = -1 \quad \Rightarrow 1 - 4 + 11 - 12 + 8 = 4A \Rightarrow A = 1;$

$x = 0 \quad \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + 8 = 9A + 3C + E \Rightarrow -1;$

$x = 1 \quad \Rightarrow 1 + 4 + +11 + 12 + 8 = 36A + 12(B + C) + 2(D + E)$

$\Rightarrow 6(B + C) + D + E = 0;$

$x = 2 \quad \Rightarrow 16 + 32 + 44 + 24 + 8 = 121A + 33(2B + C) + 3(2D + E)$

$\Rightarrow 11(2B + C) + 2D + E = 1;$

$x = -2 \Rightarrow 16 - 32 + 44 - 24 + 8 = 9A - 3(-2B + C) - (-2D + E)$

$\Rightarrow -3(-2B + C) - (-2D + E) = 3.$

Penyelesaian untuk empat persamaan terakhir yaitu B=C= 0, D= 1, *dan* $E = -1$. *Oleh karena itu,*

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x + 1)(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{1}{x + 1} + \frac{x - 1}{(x^2 - 2x + 3)^2}.$$

Sekarang kita siap untuk menghitung integral dari fungsi pecah rasional.

Contoh 18. *Diperhatikan integral tak tentu*

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x + 2} dx.$$

Karena derajat dari pembilang lebih besar dari pada penyebut, maka langkah pertama adalah membagi pembilang dengan penyebut menggunakan pembagian panjang. Hasilnya adalah

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x + 2} = x^2 + 2x - 4 + \frac{7}{x + 2}.$$

Sekarang dengan mudah kita dapat mengintegralkan setiap suku dalam jumlahan.

$$\int \frac{x^3 + 4x^2 - 1}{x + 2} dx = \int \left(x^2 + 2x - 4 + \frac{7}{x + 2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 7ln|x + 2| + k.$$

3.5 Integral Fungsi Irasional

Terdapat dua bentuk irasional yang akan didiskusikan dala subbab ini. Dengan substitusi yang sesuai , masalah integrasi dibawa menjadi integrasi fungsi rasional. Jika integran memuat satu atau lebih pangkat-pangkat pecahan berbentuk $x = \frac{s}{p}$, maka masalah integrasinya bisa diselesaikan dengan membuat substitusi $x = u^n$ dimana n adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari penyebut-penyebut dala pangkat pecahan. Dengan substitusi tersebut, masalah integral dibawa menjadi integgrasi ungsi rasional.

Contoh 19. Perhatikan integral tak tentu berikut

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

Karena KPK dari 3 dan 2 adalah 6, maka dibuat substitusi $x = u^6$, $dx = 6u^5du$ dan

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sqrt[3]{u^6}}{1+\sqrt{u^6}}6u^5du = \int \frac{u^2}{1+u^3}6u^5du = 6\int \frac{u^7}{1+u^3}du$$

Dilanjutkan dengan integrasi fungsi rasional.

Latihan

Soal (1) – (33) hitung setiap integral tak tentu dengan menggunakan substitusi yang diberikan.

(1) $\int sin$ (3x) dx , u = 3x

(2) cos (5x) dx, u = 5x

(3) $\int x^2 \tan (x^3 + 1)$ dx, u = x^3 + 1

(4) $\int sec^2$ (3x + 1) dx, u= 3x + 1

(5) $\int csc^2$ (2x - 1) dx, u = 2x - 1

(6) $\int x \sin (x^2)$ dx, u = x^2

(7) $\int x^2 \cos (x^3 + 1)$ dx, u = x^3 + 1

(8) $\int$ sec (3x + 5) dx, u = 3x + 5

(9) $\int csc$ (5x - 7) dx, u = 5x – 7

(10) $\int sin^3$(x) dx, u = cos (x)

(11) $\int cos^3$ (x) dx, u = sin (x)

(12) $\int tan^3$ (x) dx, u = tan (x)

(13) $\int cot^3$ (x) dx, u = cot (x)

(14) $\int sec^4$ (x) $\sec^2$ dx, u = tan (x)

(15) $\int sin^3$ (x) cos (x) dx, u = sin (x)

(16) $\int tan^5$ (x) $\sec^2$ (x) dx, u = tan (x)

(17) $\int cot^3$ (x) $\csc^2$ (x) dx, u = cot (x)

(18) $\int sec^3$ (x) tan (x) dx, u = sec (x)

(19) $\int csc^3$ (x) cot (x) dx, u = csc (x)

(20) $\int x^2 (2x^3 + 1)$ dx, u = $2x^3$ + 1

(21) $\int \frac{2}{3x-4}$ dx, u = 3x − 4

(22) $\int \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx$, u= x^2-1

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} dx$, u = 1 + $\sqrt{x}$

(24) $\int x\sqrt{x+2}\ dx$, u = x +2

(25) $\int \frac{x}{3x^2+1} dx$, u = $3x^2$ + 1

(26) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx$, u = x^2 + 2x + 2

(27) $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx$, u = x^2 -5x + 3

(28) $\int \frac{x}{(1+x^2)^4} dx$, u = 1 + x^2

(29) $\int \frac{x+3}{x-1} dx$, u = x – 1

(30) $\int x^3 \sqrt{x^2+1}\ dx$, u = x^2 + 1

(31) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$, u = $\sqrt{x}$

(32) $\int e^x\ (4-\ e^x)^{\frac{3}{2}} dx$, u = 4 - e^x

(33) $\int \frac{1}{x^2\ (1+x^{-1})} dx$, u = 1 + x^{-1}

Hitunglah integral-integral berikut ini.

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

(3) $\int \frac{1}{4-x^2} dx$

(4) $\int \frac{x}{9+x^2} dx$

(5) $\int \frac{1}{9+x^2} dx$

(6) $\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$

(8) $\int \frac{x}{x^2-16} dx$

(9) $\int \frac{1}{x^2-16} dx$

(10) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} dx$

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}} dx$

(12) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx$

(13) $\int \frac{1}{x\sqrt{9-x^2}} dx$

(14) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+16}} dx$

(15) $\int \sqrt{4-9x^2}\, dx$

(16) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(17) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}} dx$

(18) $\int \frac{1}{(9-x^2)} dx$

(19) $\int \frac{1}{(x^2-16)^2} \, dx$

(20) $\int \frac{1}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

(21) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} \, dx$

(22) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} \, dx$

(23) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}} \, dx$

(24) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} \, dx$

(25) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} \, dx$

(26) $\int \frac{1}{x^2-2x+5} \, dx$

(27) $\int \frac{1}{x^2-4x+12} dx$

(28) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$

(29) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+12}} \, dx$

(30) $\int \frac{1}{4x-x^2} \, dx$

(31) $\int \frac{x}{x^2-4x-12} \, dx$

(32) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

(33) $\int \sqrt{5-4x-x^2} \, dx$

(34) $\int \frac{2x+7}{x^2+4x+13} \, dx$

(35) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}} \, dx$

(36) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}} \, dx$

(37) $\int \frac{x+4}{\sqrt{9x^2+16}} \, dx$

(38) $\int \frac{x+2}{\sqrt{16-9x^2}} \, dx$

(39) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-4x^2}} \, dx$

(40) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$

Untuk soal (1)-(6), buktikan setiap rumus dari integral fungsi-fungsi trigonometri invers. Integral diselesaikan pertama kali menggunakan rumus integrasi parsial dengan mengambil u sama dengan fungsi integral.

(1) $\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + k$

(2) $\int \arccos(x)\,dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$+k

(3) $\int \arctan(x)\,dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}In\left|1+x^2\right|$+k

(4) $\int \text{arccot}(x)\,dx = x\,\text{arccot}(x) + \frac{1}{2}In\left|1+x^2\right|$+k

(5) $\int \text{arcsec}(x)\,dx = x\,\text{arcsec}(x) - In\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$+k

(6) $\int \text{arccsc}(x)\,dx = x\,arcsc(x) + In\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$+k

Hitung integral-integral berikut ini dan gunakan rumus-rumus reduksi yang sudah diperoleh sebelumnya.

(1) $\int xe^{-2}$dx
(2) $\int x^3 In(x)dx$
(3) $\int x\, In^2(x)dx$
(4) $\int In^3(x)dx$
(5) $\int e^{2x}\sin(3x)$dx
(6) $\int e^{3x}\cos(2\text{x})\,dx$
(7) $\int x^2\sin(2\text{x})\,dx$
(8) $\int \sin(\text{In(x)})\,dx$
(9) $\int x\, In\,(x+1)dx$
(10) $\int xIn^3\,(x)dx$
(11) $\int x^2\, In\,(x)dx$
(12) $\int x^2\, In^3\,(x)dx$
(13) $\int x^3\sin(\text{x})\,dx$
(14) $\int x^3\cos(x)\,dx$
(15) $\int x^3\cos(2x^2-1)\,dx$
(16) $\int xsin^2\,(x)dx$
(17) $\int x^3\sin(x^2)dx$
(18) $\int x\sin(x)\cos(x)\,dx$
(19) $\int x\arctan(x)dx$

Hitung setiap integral berikut menggunakan substitusi yang diberikan

(1) $\int \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}dx,\quad x = u^6$
(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx,\quad u^2 = 1+e^{2x}$
(3) $\int \frac{1}{1+x^{\frac{1}{3}}}dx,\quad x = u^3$

Hitung setiap integral berikut ini menggunakan suatu substitusi yang sesuai

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx =$

(2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\,dx =$

(3) $\int \frac{1}{4+\sqrt{x}}\,dx =$

(4) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx =$

(5) $\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{8+x^{\frac{1}{2}}}\,dx =$

(6) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx =$

(7) $\int \frac{x}{1+x^{\frac{2}{3}}}\,dx =$

(8) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\,dx =$

(9) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}\,dx =$

(10) $\int \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx =$

(11) $\int \frac{1}{4+\cos(x)}\,dx =$

(12) $\int \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}\,dx =$

(13) $\int \frac{1}{\sin(x)-\cos(x)}\,dx =$

BAB 4

INTEGRAL TAK WAJAR

4.1 Definisi Integral Tak Wajar

Definisi: Integral takwajar (improper integral) adalah integral dengan satu atau kedua syarat berikut ini dijumpai, yaitu

(1) Interval dari integrasi adalah tidak terbatas:

$$[a, +\infty) ,(-\infty , b],(-\infty , \infty),$$

contoh:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Integran mempunyai suatu ketak kontinuan takhingga disuatu titik c dalam [a, b]

$$\lim_{x \to c} f\,(x) = \pm\infty,$$

contoh:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

4.2 Batas Tak Terhingga

Definisi: Diandaikan bahwa suatu fungsi f kontinu pada $(-\infty, \infty)$. Didefinisikan Integral takwajar ketika limitnya ada:

$$(a) \int_a^\infty f\,(x)\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_a^b f\,(x)\, dx,$$

$$(b) \int_{-\infty}^b f\,(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f\,(x)\, dx,$$

$$(\,c) \int_{-\infty}^\infty f\,(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f\,(x)\, dx + \int_c^\infty f\,(x)\, dx,$$

Dimana, dalam definisi (c), integral-integral di ruas kanan ada untuk c. jika integral takwajar ada, maka integral dikatakan konvergen, tetapi jika tidak ada maka dikatakan divergen.

Seringkali kita menuliskan $[\ F(x)]_a^\infty$ sebagai singkatan untuk

$$[F\ (x)]_{a}^{\infty} = \lim_{t\to\infty}[F(x)]_{t}^{b},$$

Secara analog:

$$[F(x)]_{-\infty}^{b} = \lim_{t\to-\infty}[F(x)]_{t}^{b},$$

Dan

$$[F(x)]_{-\infty}^{\infty} = [F(x)]_{-\infty}^{c} + [F(x)]_{c}^{\infty} = \lim_{t\to-\infty}[F(x)]_{c}^{t},$$

Contoh 1:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1\ ,$$

Atau dalam notasi sederhana:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1$$

Contoh 2: Dicari nilai p sehingga integral berikut bernilai konvergen ,

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx.$$

Jika p =1, maka kita mempunyai

$$\int_{1}^{t}\frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_{1}^{t} = \ln(t)$$

Sehingga

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\ln(t) = \infty$$

Yang berarti bahwa integral adalah divergen. Sekarang diandaikan p ≠ 1:

$$\int_{1}^{t}\frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{1}^{t} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right).$$

Jika p>1, maka p-1 > 0 dan

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}}-1\right) = 0$$

Karena itu integral adalah konvergen. Di sisilain, jika p < 1, maka p-1 < 0 atau 1 –p > 0, dan

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}(t^{1-p}-1) = \infty$$

Karena integral adalah divergen. Jadi

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \text{ adalah konvergen jika p} > 1, dan\ divergen\ jika\ p \leq 1$$

4.3 Tak Kontinu di SuatuTtik

Definisi: Diasumsikan bahwa f kontinu pada [a, b) tetapi

$$\lim_{x\to b^-} f\,(x) = \pm\infty$$

Maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x),$$

Secara analog, jika f kontinu pada(a, b] tetapi

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty,$$

Maka didefinisikan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_a^b f(x)$$

Terakhir, jika f(x) mempunyai ketidak kontinuan takhingga di suatu titik c dalam[a, b], maka definisiny adalah

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Jika limitnya ada, integral tidak wajar dikatakan, jika tidak maka dikatakan divergen jika interval integrasi adalah [a, b), seringkali kita menuliskan $[F(x)]_a^t$ sebagai suatu singkatan untuk $\lim_{t\to b^-}[F(x)]_a^t$. dan analog untuk interval (a, b].

Contoh 3:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \left[2\sqrt{x}\right]_t^1 = \lim_{t\to -^-} \left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2,$$

atau dalam notasi sederhana :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{X}} dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = \lim_{t\to 0^-}\left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2.$$

Contoh 4: *Diperhatikan integral tak wajar*

$$\int_0^1 \ln(x) dx.$$

$Fungsi\ \ln(x)\ mempunyai\ suatu\ asimtot\ tegak\ di\ x = 0\ karena$

$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty.$ *karena itu*

$$\int_0^1 \ln(x)\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln\,(x)\; dx = \lim_{t\to 0^+} [x\ln(x) - x]_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+}(\ln(1) - 1 - t\ln(t) + t)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}(t - 1 - t\ln\ (\mathrm{t}))$$

$$= -1$$

4.4 Uji Perbandingan

Proposisi: *Diandaikan* f *dan* g *adalah fungsi-fungsi kontinu sedemikian sehingga* $f(x) \geq g(x) \geq 0$ $untuk\ x \geq 0.$

$$(1)\ Jika \int_a^\infty f(x)\, dx\ jika\ konvergen\ maka \int_a^\infty g(x)\, dx\ adalah\ konvergen.$$

$$(2)\ Jika \int_a^\infty g(x)\, dx\ jika\ divergen\ maka \int_a^\infty f(x)\, dx\ adalah\ divergen.$$

Pernyataan serupa berlaku untuk integral dengan ketakkontinuan tak hingga di suatu titik.

Contoh 5: *Diperhatikan tak wajar*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx.$$

Dipunyai $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\, dx.$

Karena integral pertama di ruas kanan adalah suatu integral tentu biasa, maka hita hanya perlu menunjukkan bahwa kedua adalah konvergen. Pada kenyataannya, tentu $x \geq 1$ *dipunyai* $x^2 \geq x, sehingga\ e^{-x^2} \leq e^{-x}. Di\ sisi\ lain,$

$$\int_1^t e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_i^t = -e^{-t} + e^{-1}$$

Karena itu

$$\int_1^\infty e^{-x}\ dx = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1},$$

Sehingga $\int_1^\infty e^{-x}\, dx$ *adalah konvergen. Oleh karena itu, berdasarkan teorema perbandingan diperoleh bahwa* $\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx\ adalah\ konvergen.$

Latihan

Untuk soal 1 – 3, buktikan setiap pernyataan yang diberikan.

(1) $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = 1$ (2) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (3) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

Untuk Soal 4 – 27, hitung setiap integral tak wajar yang diberikan.

(4) $\int_0^\infty e^{-x}\,sin(2x)\,dx$

(5) $\int_0^\infty e^{-4x}\cos(3x)\,dx$

(6) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

(7) $\int_0^\infty 2xe^{-x}\,dx$

(8) $\int_0^\infty x^2\,e^{-x}\,dx$

(9) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(10) $\int_4^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$

(11) $\int_1^\infty \frac{4x}{1+x^2}\,dx$

(12) $\int_{\mathbf{1}}^\infty \frac{\boldsymbol{x}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(13) $\int_{16}^\infty \frac{1}{x\ln^{\mathrm{p}}(x)}\,dx$

(14) $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx$

(15) $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^{\mathrm{p}}(x)}\,dx, p > 1$

(16) $\int_{-\infty}^1 3xe^{-x^2}\,dx$

(17) $\int_{-\infty}^2 e^x\,dx$

(18) $\int_0^\infty \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx$

(19) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+9}\,dx$

(20) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(21) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

(22) $\int_0^5 \frac{x}{(25-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(23) $\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx$

(24) $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(25) $\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{(x+25)}}\,dx$

(26) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\,dx$

(27) $\int_0^\infty x^2e^{-x^3}\,dx$

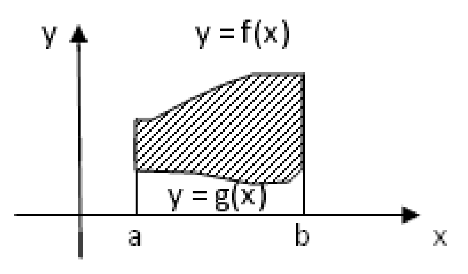
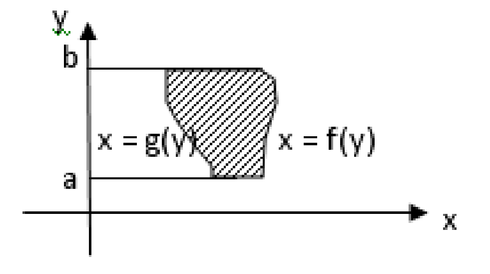
BAB 5

APLIKASI INTEGRAL

5.1 Luas Bidang Datar

Pada subbab ini kita akan mencari luas bidang datar antara dua kurva.Kurva-kurva yang diamati adalah kurva yang muncul dalam persamaan Kartesius ,persamaan-persamaan,dan persamaan kutub.

Dalam bagian ini kita akan mencari suatu rumus untuk menentukan luas bidang datar antara dua kurva Kartesius. Terdapat dua kasus yang diperhatikan seperti yang terlihat dalam Gambar 4.1.

	
$L = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (atas – bawah)	$L = \int_a^b (f(y) - g(y))dy$ (kanan – kiri)

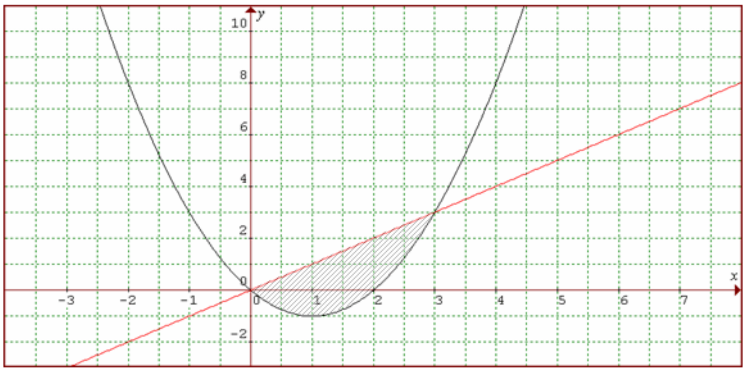
Gambar 5.1 : Bidang datar antara dua kurva

Contoh 1:

Tentukan Luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2 – 2x dan garis y = x adalah

Perhatikan gambar berikut!

*Perpotongan terjadi di x = 0 dan x = 3



Gambar 5.2 : Bidang datar antara dua kurva (atas-bawah)

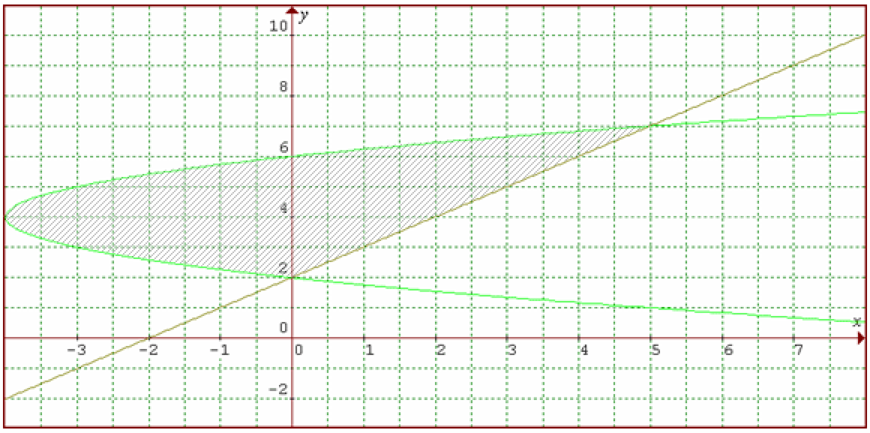
$$L = \int_0^3 [x - (x^2 - 2x)]\, dx$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2) dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 4\frac{1}{2} satuan\ luas$$

Contoh 2:

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva x = y^2 – 8y + 12 dan garis y = x + 2



Gambar 5.3 : Bidang datar antara dua kurva (kanan-kiri)

Perpotongan terjadi di y = 2 dan y = 7

*y = x + 2 diubah menjadi x = y – 2

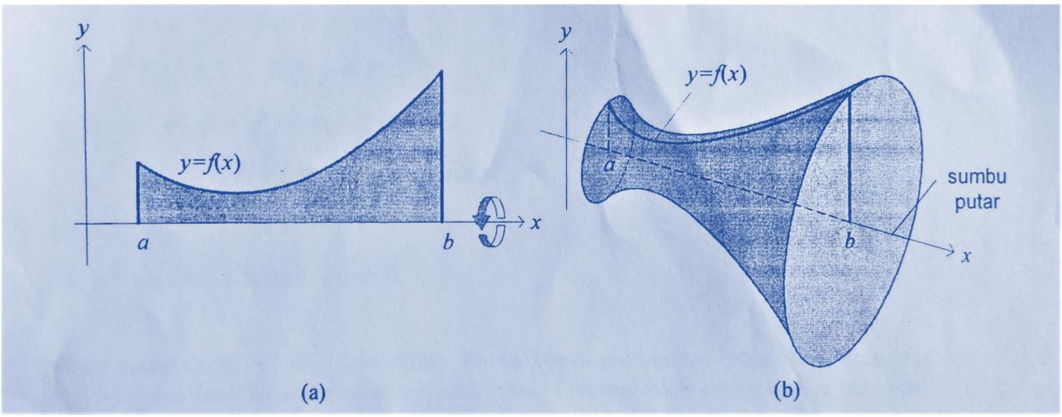
$$L = \int_2^7 \big((y-2) - (y^2 - 8y + 12)\big) dy$$

$$= \int_2^7 (9y - 14 - y^2) dy$$

$$= \left[\frac{9}{2}y^2 - 14y - \frac{1}{3}y^3\right]_2^7 = 20\frac{5}{6}\ satuan\ luas$$

5.2 Volume Benda Putar

Sebelum menurunkan rumus untuk volume benda putar, kita pertama kali perlu mendefinisikan apa yang dimaksud dengan suatu benda putar. Diambil $y = f(x)$ adalah suatu fungsi kontinu tak negatif pada suatu interval $[a, b]$, lihat Gambar 4.4 (a) . Ketika daerah antara sumbu x dan kurva $y = f(x)$, $a \le x \le b$, diputar terhadap sumbu x , maka diperoleh daerah tiga dimensi seperti terlihat dalam Gambar 4.4 (b) yang selanjutnya dinamakan **benda putar** (*solid of revolution*) . Dalam kasus ini sumbu x dinamakan **sumbu putar** .

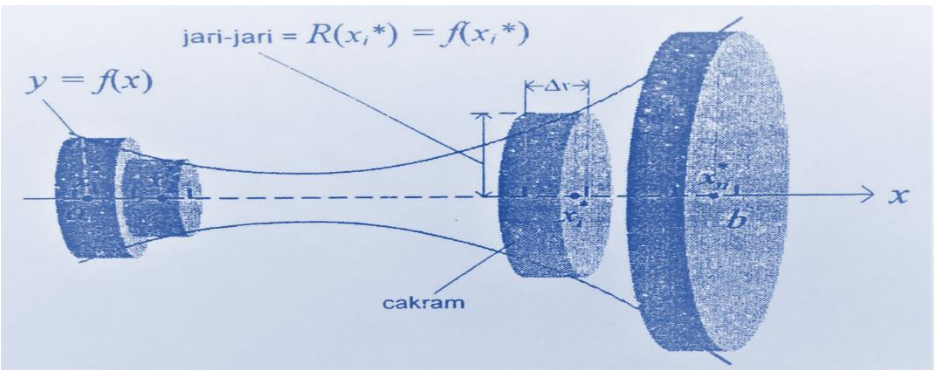


Gambar 5.4: (a) Bidang datar; (b) benda padat sebagai hasil putaran dari bidang datar

5.2.1 Metode Cakram

Untuk mencari volume benda putar dalam Gambar 4.4 (b) , volume pada setiap interval bagian dihampiri oleh suatu bidang potong yang tegak lurus dengan sumbu putar. Dalam kasus di atas, bidang potongnya adalah cakram seperti terlihat dalam Gambar 4.5. Diambil n interval bagian dengan lebar Δx dan dimisalkan suatu titik dalam setiap interval bagian adalah x_i^*. Kita mengamati bahwa setiap cakram adalah suatu silinder berjari-jari $R(x_i^*) = f(x_i^*)$ dan mempunyai tinggi Δx , sehingga volume dari setiap cakram yaitu

$$V_i = \pi\,[R(x_i^*)]^2\,\Delta x = \pi\,[f(x_i^*)]^2\,\Delta x$$



Gambar 5.5: Cakram-cakram pada benda putar dalam 4.6 (b)

Selanjutnya volume benda putar dapat dihampiri oleh

$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi\ [f(x_i^*)]^2\ \Delta x$

Berdasarkan jumlahnya tak hingga, diperoleh volume eksak untuk benda putar yaitu

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\ dx = \pi \int_a^b y^2\ dx}$$

Metode untuk menghitung volume benda putar tersebut dinamakan metode cakram(disk method) karena bidang potongnya adalah suatu cakram bundar berjari-jari R (x).

Sedang bila grafik fungsi dinyatakan dengan $x = g(y),\ x = 0,\ y = c\ dan\ y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y maka volume benda putar :

$$V = \int_c^d \pi(g(y))^2\ dy$$

Bila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x) \geq 0$, $y = g(x) \geq 0,\ f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b],\ x = a\ dan\ x = b$ diputar dengan sumbu putar sumbu X maka volume:

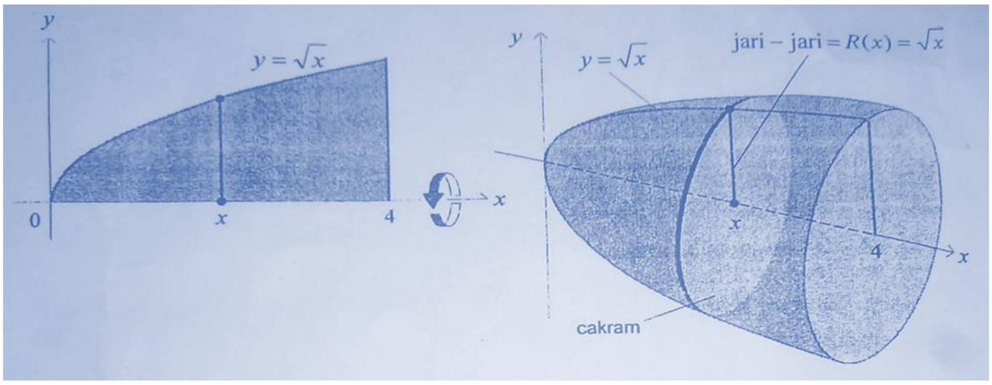
$$V = \int_a^b \pi\left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx$$

Bila daerah yang dibatasi oleh $x = f(y) \geq 0, x = g(y) \geq 0,\ f(y) \geq g(y)$ untuk setiap $y \in [c,d], y = c\ dan\ y = d$ diputar dengan sumbu putar sumbu Y maka volume :

$$V = \int_c^d \pi\left(f^2(y) - g^2(y)\right)dy$$

Contoh 3: Cari volume benda putar yang di hasil ketika bidang datar yang dibatasi oleh y=$\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$, dan sumbu x diputar terhadap sumbu x.

Bidang datar yang diberikan dan benda putar yang dihasilkan digambarkan seperti berikut:



Gambar 5.6 Cakram pada benda putar untuk fungsi $y = \sqrt{x}$

Volume benda putar yaitu

$$V = \pi \int_0^4 Y^2 \; dx = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \frac{4^2}{2} = 8\pi$$

5.2.2 Metode Kulit Tabung

Metode kulit tabung sebagai alternatif lain dalam perhitungan volume benda putar yang mungkin lebih mudah diterapkan bila kita bandingkan dengan metode cakram. Benda putar yang terjadi dapat dipandang sebagai tabung dengan jari-jari kulit luar dan dalamnya berbeda, maka volume yang akan dihitung adalah volume dari kulit tabung. Untuk lebih memperjelas kita lihat uraian berikut.

Pandang tabung dengan jari-jari kulit dalam dan kulit luar berturut-turut r_1 dan r_2 , tinggi tabung h. Maka volume kulit tabung adalah :

$$\Delta V = \left(\pi r_2 - \pi r_1\right)h = 2\pi r h \Delta r$$

$dengan: \dfrac{r_2 - r_1}{2} = r\left(rata - rata,\, jari - jari\right), r_2 - r_1 = \Delta r$

Bila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ diputar mengelilingi sumbu Y maka kita dapat memandang bahwa jari-jari $r = x \; dan \; \Delta r = \Delta x$ dan tinggi tabung $h = f(x)$ Oleh karena itu volume benda putar yang terjadi adalah

$$V = \int_a^b 2\pi x f\left(x\right) dx$$

Misal daerah dibatasi oleh kurva
$y = f\left(x\right), y = g\left(x\right), f(x) \geq g(x), x \in \left[a,b\right], x = a \; dan \; x = b$ diputar mengelilingi sumbu Y. Maka volume benda putar

$$V = \int_a^b 2\pi x\left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Bila daerah dibatasi oleh grafik yang dinyatakan dengan $x = f(y),\ x = 0,\ y = c,\ y = d$ diputar mengelilingi sumbu X, maka volume =

$$V = \int_c^d 2\pi y\left(f(y)\right) dy$$

Sedang untuk daerah yang dibatasi oleh
$x = f\left(y\right), x = g\left(y\right), f(y) \geq g(y), y \in \left[c,d\right], dan \; y = c \; dan \; y = d$ diputar mengelilingi sumbu X. Maka volume benda putar yang didapat dinyatakan dengan

$$V = \int_c^d 2\pi y\left(f(y) - g(y)\right) dx$$

Contoh 4:

Hitung volume benda putar bila daerah yang terletak di kuadran pertama dibawah parabola
Jawab

$y = 2 - x^2$ dan di atas parabola $y = x^2$ diputar mengelilingi sumbu Y.

$$V = 2\pi\int_0^1 x\left[\left(2 - x^2\right) - x^2\right]dx = \pi$$

Bila kita gunakan metode cakram, maka daerah kita bagi menjadi dua bagian yaitu : pada selang $0 \le y \le 1$ dibatasi $x = \sqrt{2-y}$ dan sumbu Y sedang pada selang dibatasi $1 \le y \le 2$

dan sumbu Y. Oleh karena itu volume =

$$V = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dx + \pi\int_1^2 \left(\sqrt{2-y}\right)^2 dy = \pi$$

Contoh 5:

Hitung volume benda putar bila daerah D yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$, sumbu X dan sumbu Y bila diputar mengelilingi garis x = 1
Jawab

Misal di ambil sembarang nilai x pada daerah D maka didapatkan tinggi benda pejal, $\left(1 - x^2\right)$dan jari-jari (jarak x terhadap sumbu putar / garis x = 1), (1 + x). Oleh karena itu,

volume benda putar :

$$V = 2\pi\int_{-1}^0 (1 + x)\left(1 - x^2\right)dx = \frac{5}{6}\pi$$

5.3 Luas Permukaan Benda Putar

Luas permukaan yang terbentuk oleh perputaran busur AB, suatu kurva kontinu, sekeliling sebuah garis yang sebidang. Berdasarkan definisi merupakan limit jumlahan luas yang terbentuk oleh n buah tali AP_1, P_1P_2,.....,$P_{n-1}B$, jika diputar sekeliling garis itu, bila banyaknya tali menuju tak berhingga sehingga panjang setiap tali menuju nol.

Jika A(a,c) dan B(b,d) dua titik pada kurva y = f(x), dimana f(x) dan f'(x) masing – masing kontinu dan f(x) tidak berubah tanda pada selang a ≤ x ≤ b, luas permukaan yang terbentuk oleh perputaran busur AB sekeliling sumbu x dinyatakan oleh

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\, ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Apabila, berlaku bahwa f'(x) ≠ 0 pada interval tersebut rumus dapat pula ditulis sebagai berikut:

$$S_x = 2\pi \int_{ab} y\, ds = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Dengan cara yang sama, bila A(a,b) , B(b,d) terletak pada kurva x= g(y) , g(y) dan g'(y) kontinu dan tidak bertukar tanda pada $c \le y \le d$, maka luas permukaan sebagai akibat perputaran busur AB mengelilingi sumbu Y adalah:

$$S_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Bila g'(y) ≠ 0 ,berlaku:

$$S_y = 2\pi \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Bila kurva dalam bentuk parameter $x = f(t)$ dan y = g(t), maka

$$S_y = 2\pi \int_{t=t^1}^{t1} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt \text{ dan } S_y = 2\pi \int_{t=t^1}^{t1} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dt$$

Luas permukaan di Dalam Koordinat Polar.

Luas permukaan akibat perputaran $r = f(\theta)$ dari $\theta = \theta_1$ ke $\theta = \theta_2$ mengelilingi sumbu polar ($\theta = 0$ *atau sumbu* X):

$$S_x = 2\pi \int_{\theta 1}^{\theta 2} r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

dan mengelilingi sumbu tegak ($\theta = 90°$ atau sumbu Y):

$$S_y = 2\pi \int_{\theta 1}^{\theta 2} r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Contoh 6:

Cari luas permukaan benda putar yg terbentuk karena perputaran busur parabola $y^2 = 12x$ dari x = 0 sampai x = 3 sekeliling sumbu x

Jawab : Penyelesaian menggunakan rumus: $S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$$y^2 = 12x$$

$$y = \sqrt{12x}$$

$$= (12x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(12x)^{-\frac{1}{2}}.12$$

$$= 6.(12x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{12x}} \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}$$

$$S_x = 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1 + \left(\frac{6}{y}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 y\sqrt{1 + \frac{36}{y^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 y\frac{\sqrt{y^2+36}}{y}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x + 36}\ dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (12x + 36)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}.\frac{1}{12}(12x + 36)^{\frac{3}{2}}\right)_0^3$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3}.\frac{1}{12}(12x + 36)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{36}(12x + 36)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= \frac{4\pi}{36}(12x + 36)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$

$$= \frac{\pi}{9}\left((12(3) + 36)^{\frac{3}{2}} - 36^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left((72)^{\frac{3}{2}} - (36)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(72\sqrt{72} - 36\sqrt{36}\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(72\sqrt{36.2} - 36.6\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(72.6\sqrt{2} - 216\right)$$

$$= \frac{\pi}{9}\left(432\sqrt{2} - 216\right)$$

$$= \pi(48\sqrt{2} - 24)$$

$= 24\pi\left(2\sqrt{2} - 1\right)$ satuan kuadrat

Contoh 7:

Cari luas permukaan benda putar yang terbentuk oleh perputaran busur x = y^3 dari y = 0 sampai y = 1, sekeliling sumbu y

Jawab :

S_y = 2π $\int_c^d x \sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2\, dy}$

$= \ 2\pi \displaystyle\int_0^1 y^3 \ \sqrt{1+(3y^2)^2\, dy}$

$= \ 2\pi \displaystyle\int_0^1 y^3 \ \sqrt{1+9y^4\, dy}$

$= \frac{\pi}{27}\ (1+9y^4)^{\frac{3}{2}}]_0^3$

$= \frac{\pi}{27}\ (1+9(3)^4)^{\frac{3}{2}}$-$(1+9(0)^4)^{\frac{3}{2}}]$

$= \dfrac{\pi}{27}\ (730)^{\frac{3}{2}} - 1\ \ satuan\ kuadrat$

5.4 Panjang Kurva

pada subab ini kita akan mencari panjang suatu kurva mulus (smooth curve). Suatu kurva mulus adalah grafik dari suatu fungsi kontinu yang derevatifnya juga kontinu (grafik yang tidak mempunyai titik-titik sudut). Kurva-kurva yang diamati adalah kurva yang muncul dalam persamaan kartesius, persamaan parameter, dan persamaan kutub.

5.4.1 Persamaan Kartesius

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Contoh 8:

Cari panjang kurva

$$y = \tfrac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1,\ 0 \le x \le 1$$

Jawab:

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (2\sqrt{2}\, x^{\frac{1}{2}})^2 = 8x$$

Panjang kurva dari x = 0 sampai x = 1 yaitu

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\ dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1 + 8x)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{13}{6}$$

5.4.2 Persamaan Parameter

Dalam bagian ini kita akan mencari panjang suatu kurva parameter yang diberikan oleh persamaan

$$x = F(t) \text{ dan } y = G(t), a \leq t \leq b.$$

Diasumsikan bahwa fungsi F dan G mempunyai derivative yang kontinu pada interval $[a, b]$

Dan derivative-derivatif tersebut tidak secara serempak sama dengan nol. Kita juga mengasumsikan bahwa kurva parameter bergerak berdasarkan kenaikan t dan a sampai b dan melewati titik tetap satu kali. Sementara itu, untuk tujuan penurunan rumus, kita akan mengasumsikan bahwa kurva bergerak dari kiri ke kanan ketika nilai t naik. Ini ekivalen dengan mengatakan bahwa

$$\frac{dx}{dt} > 0 \text{ untuk } a \leq t \leq b.$$

Persamaan umum untuk panjang suatu kurva parameter diturunkan dari rumus panjang kurva ketika kurva diberikan oleh persamaan sederhana $y = f(x)$ atau $x = g(y)$.

Di sini perlu untuk diketahui bahwa

$$dx = F'(t)dt = \frac{dx}{dt} dt \text{ dan } dy = G'(t)dt = \frac{dy}{dt} dt$$

Selanjutnya dari rumus (4.4) diperoleh

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)^2}\ \frac{dx}{dy} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\ \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\left|\frac{dx}{dt}\right|} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ \frac{dx}{dt} dt.$$

Berdasarkan asumsi yang sudah diberikan, kita bisa menghapus dua derivative diluar akar kuadrat dan karena itu rumus panjang kurva parameter menjadi

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \mathrm{dt}}$$

Contoh 9:

Cari panjang kurva parameter yang diberikan oleh persamaan - persamaan parameter:

$$x = 3\sin(t)\ dan\ y = 3\cos(t)\,, 0 \le t\ \le 2\pi.$$

Penyelesaikan. Kita mengetahui bahwa kurva yang diberikan adalah lingkaran berjari-jari 3 dengan pusat dit itik asal O (0,0). Kita juga mengetahui bahwa kurva melintasi titik tepat satu kali ketika t berubah dari 0 sampai 2π. Jadi kita dapat menggunakan rumus yang telah diperoleh sebelumnya. Pertama kali dicari

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos(t)\ dan\ \frac{dy}{dt} = -3\sin(t),$$

Dan selanjutnya

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9\cos^2(t) + 9\sin^2(t) = 9.$$

Jadi

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{9}\, dt = [3t]_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Latihan

Soal 1 – 12 cari volume benda putar yang dibandingkan oleh perputaran daerah terbatas terhadap sumbu yang diberikan .

1. derah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan garis-garis $y = 2$ dan $x = 0$ diputar terhadap

   a. sumbu x b. sumbu y

   c. garis $y = 2$ d. garis $x = 4$

2. daerah segitiga yang dibatasi oleh garis $y = 2x, y = 0$, dan $x = 1$ diputar terhadap

   a. garis $x = 1$ b. garis$x = 2$

3. daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$ dan garis $y = 1$ diputar terhadap

   a. garis $y = 1$ b.garis $y = -1$

   c. garis $y = 2$ d.garis $y = -2$

4. daerah segitiga dengan titik-titik koordinat $(0,0), (b, 0), (0, h)$ diputar terhadap

   a. sumbu x b. sumbu y

5. daerah segitiga dengan titik-titik koordinat $(1,1), (1,2), (2,2)$ diputar terhadap

   a. sumbu x b. sumbu y

   c. garis $x = \frac{10}{3}$ d. garis $y = 1$

6. daerah dibatasi oleh $y = \sqrt{x}, y = 2, x = 0$ diputar terhadap

   a. sumbu x b. sumbu y

   c. garis $x = 4$ d. garis $y = 2$

7. daerah di kuadran ı yang dibatasi oleh kurva $x = y - y^3$ dan sumbu y diputar terhadap

   a. sumbu x b. garis$y = 1$

8. daerah dikuadran ı yang dibatasi oleh kurva $x = y - y^3, x = 1$, dan $y = 1$ diputar terhadap

   a. sumbu$x$ b. sumbu y

   c. garis $x = 1$ d. garis $y = 1$

9. daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}\ dan\ y = \frac{1}{8}x^2$ diputar terhadap

   a. sumbu x b. sumbu y

10. daerah yang dibatasi oleh $y = 2x - x^2$ dan $y = x$ diputar terhadap

    a. sumbu y b. garis $x = 1$

11. daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan parabola-parabola $x = y^2$ dan $x = 3y^2 - 2$ Diputar terhadap sumbu x.

12. daerah yang dibatasi oleh garis $x = 1$, parabola $y = x^2$, dan kurva $y = -x^4$ diputar terhadap sumbu y.

Soal 1-5, cari volume benda putar yang dihasilkan ketika daerah yang di batasi garis dan kurva diputar terhadap sumbu y.

1. x=$\sqrt{5y^2}$,x=0, y=-1,y=1 2. x=$y^{\frac{1}{2},}$ x=0, y=2

3. x=$\frac{\sqrt{2y}}{y^{2+}1}$, x=o, y=1 4. X=$\frac{2}{y+1}$,x=0,y=0,y=3

5. x=$\sqrt{2\sin(2y)}$,0 ≤ y ≤ $\frac{1}{2}$π, x= 0

Soal 1-6, cari volume benda putar yang dihasilkan ketika daerah yang dibatasi oleh garis dan kurva diputar terhadap sumbu x.

1. $y = x^2, y = 0, x = 2$
2. $y = x^3, y = 0, x = 2$
3. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0$
4. $y = x - x^2, y = 0$
5. $y = \sqrt{\cos(x)}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$, $y = 0$, $x = 0$
6. $y = \sec(x), y = 0, x = -\frac{1}{4}\pi, x = \frac{1}{4}\pi$

Soal 1-10, cari panjang kurva yang diberikan dalam persamaan berikut:

1. $\gamma = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{\frac{3}{2}}$ dari x = 0 sampai x = 3
2. $\gamma = x^{\frac{3}{2}}$ dari x = 0 sampai x = 4
3. $x = \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{4\gamma}$ dari y = 1 sampai y = 3 $\left[petunju: 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right) \textit{ adalah suatu kuadrat sempurna} \right]$
4. $x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$ dari y = 1 sampai y = 9 $\left[petunjuk: 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right) \textit{ adalah suatu kuadrat sempurna} \right]$

5. $x = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{8y^2}$ dari y = 1 sampai y = 2 $\left[petunjuk: 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right) \; adalah\; suatu\; kuadrat\; sempurna\right]$
6. $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$ dari y = 2 sampai y = 3
   $\left[petunjuk: 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right) \; adalah\; suatu\; kuadrat\; sempurna\right]$
7. $y = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{2}{3}} + 5$ dari x = 1 sampai x = 8
8. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{4x+4}$ dari x = 0 sampai x = 2
9. $y = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$ dari x = 0 sampai x = 3
10. $y = \left(x^2 + \frac{2}{3}\right)$ dari x = -2 sampai x = 5

Soal 1-15, cari panjang kurva parameter yang diberikan.

1. $x = 1 - t, y = 2 + 3t, -\frac{2}{3} \le t \le 1$
2. $x = \cos(t), y = t + \sin(t), 0 \le t \le \pi$
3. $x = t^3, y = \frac{3}{2}t^2, 0 \le t \le \sqrt{3}$
4. $x = \frac{1}{2}t^2, y = \frac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}}, \; 0 \le t \le 4$
5. $x = \frac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}}, \; y = t + \frac{1}{2}t^2, \; 0 \le t \le 3$
6. $x = 8\cos(t) + 8t\sin(t), \; y = 8\sin(t) + 8t\cos(t), \; 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$
7. $x = 1 + 3t^2, \; y = 4 + 2t^3, \; 0 \le t \le 1$
8. $x = t - t^2, \; y = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \; 1 \le t \le 2$

[*Petunjuk:* Selesaikan masalah integrasi dengan substitusi trigonometri]

9. $x = e^t - e^{-t}, \; y = 5 - 2t, \; 0 \le t \le 3$
10. $x = e^t\cos(t), \; y = e^t\sin(t), \; 0 \le t \le \pi$
11. $x = \cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}t\right)\right), \; y = \sin(t), \; \frac{1}{4}\pi \le t \le \frac{3}{4}\pi$
12. $x = e^t - t, \; y = 4e^{\frac{1}{2}t}, -8 \le t \le 3$
13. $x = 3t - t^3, \; y = 3t^2, -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$
14. $x = sin^2(t), \; y = cos^2(t), \; 0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$
15. $x = cos^2(t), \; y = cos(t), \; 0 \le t \le \pi$